

Расчетно-графические задания

Задача №1

Вычислить двойной интеграл по указанной области Ω .

Таблица №1

1	$\iint_{\Omega} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy$ $\Omega : x \geq 0, y \leq 2, y \geq \frac{x}{2}$	16	$\iint_{\Omega} x^2 \sin 2xy dx dy$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq \frac{x}{2}$
2	$\iint_{\Omega} y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 2; y \geq x$	17	$\iint_{\Omega} x^2 e^{-xy} dx dy$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq 2x$
3	$\iint_{\Omega} y^2 \sin xy dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 1; y \geq 2x$	18	$\iint_{\Omega} x^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy$ $\Omega : x \leq 3; y \geq 0; y \leq \frac{x}{3}$
4	$\iint_{\Omega} y^2 \cos \frac{xy}{3} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 3; y \geq 3x$	19	$\iint_{\Omega} x^2 \cos \frac{xy}{4} dx dy$ $\Omega : x \leq 4; y \geq 0; y \leq \frac{x}{4}$
5	$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) e^{-xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 1; y \geq x$	20	$\iint_{\Omega} (2x^2 + 3y^2) e^{xy} dx dy$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq x$
6	$\iint_{\Omega} x^2 \cos \frac{xy}{3} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 2; y \geq \frac{x}{2}$	21	$\iint_{\Omega} (3x^2 + 2y^2) \sin xy dx dy$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq x$
7	$\iint_{\Omega} y^2 \cos 3xy dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 3; y \geq \frac{x}{3}$	22	$\iint_{\Omega} x^2 \sin \frac{xy}{3} dx dy$ $\Omega : x \leq 3; y \geq 0; y \leq \frac{x}{3}$

8	$\iint_{\Omega} x^2 \cos 4xy dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 4; y \geq \frac{x}{4}$	23	$\iint_{\Omega} y^2 \cos \frac{xy}{4} dx dy$ $\Omega : x \leq 4; y \geq 0; y \leq \frac{x}{4}$
9	$\iint_{\Omega} x^2 e^{4xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 2; y \geq \frac{x}{2}$	24	$\iint_{\Omega} x^2 e^{2xy} dx dy$ $\Omega : x \leq 3; y \geq 0; y \leq 2x$
10	$\iint_{\Omega} y^2 e^{2xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 3; y \geq 2x$	25	$\iint_{\Omega} (x^2 - 2y^2) e^{xy} dx dy$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq x$
11	$\iint_{\Omega} x^2 e^{-2xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0, y \leq 2, y \geq \frac{x}{2}$	26	$\iint_{\Omega} (x^2 - y^2) \cos xy dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 2; y \geq \frac{x}{2}$
12	$\iint_{\Omega} (x^2 + 3y^2) e^{xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 2; y \geq x$	27	$\iint_{\Omega} (x^2 - 2y^2) \sin 2xy dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 3; y \geq \frac{x}{3}$
13	$\iint_{\Omega} y^2 e^{3xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 1; y \geq 2x$	28	$\iint_{\Omega} y^2 e^{-5xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 4; y \geq \frac{x}{4}$
14	$\iint_{\Omega} (x^2 - y^2) e^{-xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 3; y \geq 3x$	29	$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) e^{-3xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 2; y \geq \frac{x}{2}$
15	$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \sin xy dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 1; y \geq x$	30	$\iint_{\Omega} xye^{xy} dx dy$ $\Omega : x \geq 0; y \leq 3; y \geq 2x$

Образец решения задачи №1

Проведем вычисления для следующего интеграла

$$\iint_{\Omega} x^2 e^{xy} dx dy \quad \Omega = \{(x, y) : x \geq 0; y \leq 2; y \geq 2x\}.$$

Применим формулу повторного интегрирования: внутренний интеграл по переменной y , внешний по x .

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x^2 e^{xy} dx dy &= \int_0^1 x^2 dx \int_{2x}^2 e^{xy} dy = \int_0^1 x^2 dx \left. \frac{e^{xy}}{x} \right|_{2x}^2 = \\ &= \int_0^1 x(e^{2x} - e^{2x^2}) dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} x - \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{4} e^{2x^2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Задача №2

Вычислить объём, указанной области Ω с помощью двойного интеграла переходя к полярным координатам.

Таблица №2

1	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0;$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq \frac{x+y}{x^2+y^2}$	16	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0;$ $9 \leq x^2 + y^2 \leq 16; 0 \leq z \leq \frac{2x+5y}{x^2+y^2}$
2	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ $0 \leq z \leq \frac{2x-3y}{x^2+y^2}$	17	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0;$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; 0 \leq z \leq \frac{x-y}{x^2+y^2}$
3	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0$ $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25; 0 \leq z \leq \frac{2y-x}{x^2+y^2}$	18	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0;$ $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16; 0 \leq z \leq \frac{2y-5x}{x^2+y^2}$
4	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ $0 \leq z \leq \frac{x+3y}{x^2+y^2}$	19	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq \frac{-2x-3y}{x^2+y^2}$
5	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0$ $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; 0 \leq z \leq -\frac{x+y}{x^2+y^2}$	20	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0; 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ $0 \leq z \leq \frac{y-5x}{x^2+y^2}$
6	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ $0 \leq z \leq \frac{x-3y}{x^2+y^2}$	21	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ $0 \leq z \leq \frac{y+x}{x^2+y^2}$
7	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ $0 \leq z \leq -\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$	22	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; 2 \leq x^2 + y^2 \leq 5$ $0 \leq z \leq \frac{3x+2y}{x^2+y^2}$

8	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ $0 \leq z \leq \frac{x-4y}{x^2+y^2}$	23	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0;$ $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16; 0 \leq z \leq \frac{2y-5x}{x^2+y^2}$
9	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ $0 \leq z \leq \frac{5x+3y}{x^2+y^2}$	24	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq -\frac{x+3y}{x^2+y^2}$
10	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ $0 \leq z \leq \frac{2y-3x}{x^2+y^2}$	25	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ $0 \leq z \leq \frac{3x-2y}{x^2+y^2}$
11	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0;$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; 0 \leq z \leq \frac{x+2y}{x^2+y^2}$	26	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0;$ $3 \leq x^2 + y^2 \leq 5; 0 \leq z \leq \frac{13y-x}{x^2+y^2}$
12	$\Omega: x \leq 0; y \geq 0;$ $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25; 0 \leq z \leq \frac{3y-2x}{x^2+y^2}$	27	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0;$ $3 \leq x^2 + y^2 \leq 6; 0 \leq z \leq -\frac{x+y}{x^2+y^2}$
13	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0;$ $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq -\frac{5x+4y}{x^2+y^2}$	28	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0;$ $x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq \frac{3x-2y}{x^2+y^2}$
14	$\Omega: x \geq 0; y \leq 0;$ $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2; 0 \leq z \leq \frac{3x-7y}{x^2+y^2}$	29	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0;$ $x^2 + y^2 \leq 7; 0 \leq z \leq \frac{2x+3y}{x^2+y^2}$
15	$\Omega: x \geq 0; y \geq 0;$ $2 \leq x^2 + y^2 \leq 3; 0 \leq z \leq \frac{11x+13y}{x^2+y^2}$	30	$\Omega: x \leq 0; y \leq 0;$ $x^2 + y^2 \leq 10; 0 \leq z \leq -\frac{13x+17y}{x^2+y^2}$

Образец решения задачи №2

Найдём объём области Ω , которая задаётся следующей системой неравенств:

$$\Omega: x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3; 0 \leq z \leq \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$$

Введём полярные координаты $x = \rho \cdot \cos \varphi; y = \rho \cdot \sin \varphi$.

Требуется вычислить двойной интеграл по проекции Ω на плоскость OXY , переходом к полярным координатам.

$$\iint_{\Omega} \frac{2x+3y}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} \rho \frac{(2\cos\varphi+3\sin\varphi)}{\rho^2} \rho d\rho = (\sqrt{3}-1) \int_0^{\pi/2} (2\cos\varphi+3\sin\varphi) d\varphi =$$

$$= (\sqrt{3}-1)(2\sin\varphi-3\cos\varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 5(\sqrt{3}-1)$$

Задача №3

Вычислить массу тела Ω с заданной плотностью ρ с помощью тройного интеграла.

Таблица №3

1	$\rho = x^2$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1;$ $0 \leq z \leq 10(x + 3y)$	16	$\rho = 8y + 12z$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq x;$ $0 \leq z \leq 3x^2 + 2y^2$
2	$\rho = \left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^5$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$ $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} \leq 1$	17	$\rho = 5x + \frac{3z}{2}$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq x;$ $0 \leq z \leq x^2 + 15y^2$
3	$\rho = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4}\right)^3$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leq 1$	18	$\rho = x^2 z$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq 3x;$ $0 \leq z \leq xy$
4	$\rho = x^2 + 4y^2$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1;$ $0 \leq z \leq 20 \cdot (2x + y)$	19	$\rho = x^2 + 3y^2 + z^2$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1;$ $0 \leq z \leq 10x$
5	$\rho = 1 + 2\sqrt{y}$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq x$ $0 \leq z \leq \sqrt{xy}$	20	$\rho = x^2 z$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq 3x;$ $0 \leq z \leq xy$
6	$\rho = 1 + 2x^3$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq 36x$ $0 \leq z \leq \sqrt{xy}$	21	$\rho = x + 2y + z$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq 2x$ $0 \leq z \leq x^2 + y^2$

7	$\rho = 4 + z^3$ $\Omega : x \leq 1; y \geq 0; y \leq x$ $0 \leq z \leq \sqrt{xy}$	22	$\rho = x + 3y + 5z$ $\Omega : x \leq 3; y \geq 0; y \leq \frac{x}{2}$ $0 \leq z \leq 2x^2 + 3y^2$
8	$\rho = (1 + x + y + 2z)^4$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$ $x + y + 2z \leq 1$	23	$\rho = x + 10z$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq 2x;$ $0 \leq z \leq x + y$
9	$\rho = 5x + z$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq x;$ $0 \leq z \leq x^2 + 3y^2$	24	$\rho = x^2 y$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$ $x + y + 3z \leq 1$
10	$\rho = 8y + 12z$ $\Omega : x \leq 3; y \geq 0; y \leq x;$ $0 \leq z \leq 3x^2 + 2y^2$	25	$\rho = xyz$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$ $x + 2y + 3z \leq 6$
11	$\rho = x + y + 2z$ $\Omega : x \leq 2; y \geq 0; y \leq x/2;$ $0 \leq z \leq 2x^2 + y^2$	26	$\rho = 1 + xy + z^3$ $\Omega : 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq x/3;$ $0 \leq z \leq x^2 + y^2$
12	$\rho = x^2 + xy + z^2$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 2;$ $0 \leq z \leq x + 2y$	27	$\rho = x^2 + 3y^2$ $\Omega : 0 \leq x \leq 4; 0 \leq 4y \leq x;$ $0 \leq z \leq xy$
13	$\rho = x^3 + xz + z^2$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 3;$ $0 \leq z \leq 2x + 3y$	28	$\rho = x^3 z$ $\Omega : 0 \leq x \leq 3; x \leq y \leq 3;$ $0 \leq z \leq 3xy$
14	$\rho = xy + z^3$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; 2x + y \leq 4;$ $0 \leq z \leq x^2 + y^2$	29	$\rho = z^3 xy$ $\Omega : 0 \leq x \leq 1; 3x \leq y \leq 3;$ $0 \leq z \leq x + y$
15	$\rho = (1 + 2x + y + z)^3$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$ $2x + y + 3z \leq 6$	30	$\rho = (x^2 - xy + y^2)z$ $\Omega : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1;$ $0 \leq z \leq x^2 + y^2$

Образец решения задачи №3

Найдём массу тела $\Omega: x \leq 1; y \geq 0; y \leq 2x; 0 \leq z \leq 3xy$, если плотность $\rho = x^2 + y^2 + 2z^2$.

Согласно физическому смыслу тройного интеграла масса тела Ω равна

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{3xy} (x^2 + y^2 + 2z^2) dz = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \left(x^2 z + y^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) \Big|_0^{3xy} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} (3x^3 y + 3xy^3 + 18x^3 y^3) dy = \int_0^1 \left(3x^3 \frac{y^2}{2} + \frac{3}{4} xy^4 + \frac{9}{2} x^3 y^4 \right) \Big|_0^{2x} dx = \\ &= \int_0^1 (6x^5 + 12x^5 + 72x^7) dx = (x^6 + 2x^6 + 9x^8) \Big|_0^1 = 12 \end{aligned}$$

Задача №4

Вычислить криволинейный интеграл для заданного векторного поля $\vec{A}$ вдоль замкнутой ломаной с вершинами P_1, P_2, P_3 . Вычислить этот же интеграл с помощью формулы Грина.

Таблица №4

1	$\vec{A} = (2x + y, x - y);$ $P_1(0,1); P_2(0,2); P_3(1,1)$	16	$\vec{A} = (3x - y; x + y);$ $P_1(0;0); P_2(1;1); P_3(-3;2)$
2	$\vec{A} = (3x - y; 4x + y);$ $P_1(0,0); P_2(-1,2); P_3(3,2)$	17	$\vec{A} = (3x + 2y; 2x - y);$ $P_1(0;-1); P_2(1;1); P_3(1;-1)$
3	$\vec{A} = (7x - y; 2x + y);$ $P_1(-1,-1); P_2(0,1); P_3(3,2)$	18	$\vec{A} = (x + 2y; x - y);$ $P_1(-1;2); P_2(1;3); P_3(1;-2)$
4	$\vec{A} = (2x - y; x + y);$ $P_1(-1,2); P_2(0,1); P_3(5,2)$	19	$\vec{A} = (2x - 3y; 4x + 5y);$ $P_1(-1;-1); P_2(0;1); P_3(2;3)$
5	$\vec{A} = (3x - y; 5x + y);$ $P_1(-1,2); P_2(-1,3); P_3(2,2)$	20	$\vec{A} = (x + y; 3x + 2y + 1);$ $P_1(0,0); P_2(-1;2); P_3(0,4)$
6	$\vec{A} = (2x + y; 5y - x);$ $P_1(0,0); P_2(1,1); P_3(0,5)$	21	$\vec{A} = (y - 2x; 5x - 2y);$ $P_1(0;0); P_2(1,2); P_3(0,5)$
7	$\vec{A} = (2x + 3y; 5y - 2x);$ $P_1(-1;1); P_2(0,0); P_3(0,6)$	22	$\vec{A} = (x - 3y; 2y + x);$ $P_1(-1;-1); P_2(2;1); P_3(4;2)$

8	$\vec{A} = (5x - y + 3; 6x - 2y + 2);$ $P_1(-1;2); P_2(1;1); P_3(0,7)$	23	$\vec{A} = (2x - 3y - 1; x - 2y + 3);$ $P_1(0;0); P_2(1;1); P_3(0;4)$
9	$\vec{A} = (2x - 2y + 6; x + y);$ $P_1(0,0); P_2(0,1); P_3(1,7)$	24	$\vec{A} = (x - 2y + 1; x + 3y - 2);$ $P_1(0;1); P_2(-1;2); P_3(2;3)$
10	$\vec{A} = (x + 2y - 1; x - 3y);$ $P_1(0,0); P_2(0,7); P_3(5,1)$	25	$\vec{A} = (2x - 3y; 3x - 2y + 1);$ $P_1(-1;-1); P_2(2;2); P_3(0;7)$
11	$\vec{A} = (3x + 4y; 2x - y);$ $P_1(1,0); P_2(3,0); P_3(4,3)$	26	$\vec{A} = (7x + 5y; 2x - 4y);$ $P_1(0,2); P_2(0,9); P_3(5,3)$
12	$\vec{A} = (4x - 3y; 2x + y);$ $P_1(0,2); P_2(0,3); P_3(1,4)$	27	$\vec{A} = (9x - 10y; 12x + 3y);$ $P_1(0,3); P_2(0,7); P_3(11,2)$
13	$\vec{A} = (5x + 4y; -x + y);$ $P_1(0,3); P_2(0,5); P_3(2,3)$	28	$\vec{A} = (11x + 13y; x + 3y);$ $P_1(1,0); P_2(3,0); P_3(11,12)$
14	$\vec{A} = (2x - y; 2x + 3y);$ $P_1(1,0); P_2(5,0); P_3(4,3)$	29	$\vec{A} = (13x - 7y; 5x + 8y);$ $P_1(-1,0); P_2(3,0); P_3(-12,3)$
15	$\vec{A} = (5x + 3y; 2x - 3y);$ $P_1(7,0); P_2(9,0); P_3(3,4)$	30	$\vec{A} = (15x + 12y; -7x + 5y);$ $P_1(-10,0); P_2(7,0); P_3(-13,-11)$

Образец решения задачи №4

Пусть векторное поле $\vec{A}$ заданно в виде

$$\vec{A} = (2x + 5y; 3x - 4y + 3).$$

Замкнутая ломаная задана своими вершинами

$$P_1(-1,-1); P_2(1,1); P_3(-3,3).$$

Прежде всего, напомним формулу Грина

$$\begin{aligned} \int_{P_1 P_2 P_3} \vec{A} ds &= \int_{P_1 P_2 P_3} (2x + 5y) dx + (3x - 4y + 3) dy = \\ &= \iint_{\Delta P_1 P_2 P_3} (Q_x - P_y) dx dy = \iint_{\Delta P_1 P_2 P_3} (3 - 5) dx dy = -2 \iint_{\Delta P_1 P_2 P_3} dx dy. \end{aligned}$$

Последний интеграл по геометрическому смыслу двойного интеграла численно равен площади треугольника с вершинами $P_1 P_2 P_3$.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

Таким образом $-2 \iint_{\Delta P_1 P_2 P_3} dx dy = -12$.

Для вычисления криволинейного интеграла произведём параметризацию отрезков $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$:

$$P_1 P_2 : x = -1 + 2t; y = -1 + 2t; 0 \leq t \leq 1$$

$$P_2 P_3 : x = 1 - 4t; y = 1 + 2t; 0 \leq t \leq 1$$

$$P_3 P_1 : x = -3 + 2t; y = 3 - 4t; 0 \leq t \leq 1$$

Далее используя аддитивность криволинейного интеграла, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{P_1 P_2 P_3} &= \int_{P_1 P_2} + \int_{P_2 P_3} + \int_{P_3 P_1} \\ \int_{P_1 P_2} &= \int_0^1 [2(-1 + 2t) + 5(-1 + 2t)] 2dt + \int_0^1 [3(-1 + 2t) - 4(-1 + 2t) + 3] 2dt = \\ &= \int_0^1 (-14 + 28t) dt + \int_0^1 (8 - 4t) dt = 6 \\ \int_{P_2 P_3} &= \int_0^1 [2(1 - 4t) + 5(1 + 2t)](-4)dt + \int_0^1 [3(1 - 4t) - 4(1 + 2t) + 3] 2dt = \\ &= \int_0^1 (-8t - 28) dt + \int_0^1 (-40t + 4) dt = -32 - 16 = -48 \\ \int_{P_3 P_1} &= \int_0^1 [2(-3 + 2t) + 5(3 - 4t)] 2dt + \int_0^1 [3(-3 + 2t) - 4(3 - 4t) + 3](-4)dt = \\ &= \int_0^1 (-32t + 18) dt + \int_0^1 (-88t + 72) dt = 2 + 28 = 30 \end{aligned}$$

Складывая полученные значения находим:

$$\int_{P_1 P_2 P_3} \vec{A} d\vec{s} = 6 - 48 + 30 = -12.$$

Задача №5

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ от точки M до N от заданного векторного поля $\vec{A}$.

Таблица №5

1	$\vec{A} = (x^2 - 2y, y^2 - 2x)$ $\Gamma : y - 3x^2 = 0; M(0,0); N(1,3)$	16	$\vec{A} = (x + y, 2x)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 4; y \geq 0$ $M(2,0); N(-2,0)$
2	$\vec{A} = (x^2 + 2y, y^2 + 2x)$ $\Gamma : y - 4x^3 = 0; M(-1,-4); N(1,4)$	17	$\vec{A} = (x + y, x - y)$ $\Gamma : y - x^2 = 0; M(0,0); N(1,1)$
3	$\vec{A} = (x^3 + y^2, x^2 - y^2);$ $\Gamma : y = x ; M(-1,1); N(1,1)$	18	$\vec{A} = (2xy - y, x^2 + x)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 9; y \geq 0;$ $M(3,0); N(-3,0)$
4	$\vec{A} = (y, -x)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 1; M(1,0); N(-1,0)$	19	$\vec{A} = (xy - y^2, -y)$ $\Gamma : y = -2x^2; M(0,0); N(1,-2)$
5	$\vec{A} = (x - y, 1)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 4; M(2,0); N(-2,0)$	20	$\vec{A} = (xy - y^2, x)$ $\Gamma : y - 2x^2 = 0; M(0,0); N(1,2)$
6	$\vec{A} = (xy - x, \frac{x^2}{2})$ $\Gamma : y = \sqrt{x}; M(0,0); N(4,2)$	21	$\vec{A} = (-x, y)$ $\Gamma : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1; x \geq 0, y \geq 0;$ $M(1,0); N(0,3)$
7	$\vec{A} = (y^2 - y, 2xy + x)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 9; M(3,0); N(-3,0)$	22	$\vec{A} = (x^2 - y^2, x^2 + y^2)$ $\Gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; y \geq 0;$ $M(3,0); N(-3,0)$
8	$\vec{A} = (y^2, -x^2)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 9; M(3,0); N(0,3)$	23	$\vec{A} = (xy, 0)$ $\Gamma : y - \sin x = 0;$ $M(\pi, 0) N(0, 0)$

9	$\vec{A} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2}, y - \sqrt{x^2 + y^2})$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 16; M(4,0); N(0,4)$	24	$\vec{A} = ((x + y)^2, -x^2 - y^2)$ $\Gamma : y - x^3 = 0; M(0,0); N(1,1)$
10	$\vec{A} = (xy, 2y)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 1; M(1,0); N(0,1)$ $x \geq 0; y \geq 0$	25	$\vec{A} = (x^2 + y^2, y^2)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 1; M(1,0); N(0,1)$ $x \geq 0, y \geq 0$
11	$\vec{A} = (y^2 - y, 2xy + 3y)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 4; M(-2,0); N(0,2)$ $y \geq 0$	26	$\vec{A} = (x, -y)$ $\Gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1;$ $M(3,0); N(-3,0); y \leq 0$
12	$\vec{A} = (x^2 - 2y^2, x^2 + 3y^2)$ $\Gamma : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$ $M(-2,0); N(0,3); y \geq 0$	27	$\vec{A} = (y^2 - x, y^2 / 2)$ $\Gamma : y^4 - 16x = 0;$ $M(1,2); N(0,0)$
13	$\vec{A} = (x + y, x^2 - y^2)$ $\Gamma : y^2 - x = 0; M(0,0); N(1,1)$	28	$\vec{A} = (x^3 + 1, y^3 - 1)$ $\Gamma : y^2 = 4x; M(1,2); N(1,-2)$
14	$\vec{A} = (xy, 3x)$ $\Gamma : y^3 - x = 0; M(0,0); N(1,1)$	29	$\vec{A} = (y^2 + x, y - x)$ $\Gamma : y = 8x^3; M(0,0); N(1,8)$
15	$\vec{A} = (x^2 - 2x, 3xy + y)$ $\Gamma : y^4 - x = 0; M(1,1); N(2,16)$	30	$\vec{A} = (xy, x - y)$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 1; M(1,0); N(0,1)$ $y \geq 0$

Образец решения задачи №5

Пусть векторное поле $\vec{A}$ имеет вид:

$$\vec{A} = ((x - y)^2, x^2 + y^2 - 1).$$

Вычислим криволинейный интеграл вдоль кривой $\Gamma: x^2 + y^2 = 4$ от точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$. В данном случае удобно представить Γ в параметрической форме

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \end{cases}$$

В таком случае криволинейный интеграл по Γ сведётся к определённому интегралу

$$\begin{aligned} \int_{MN} \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \int_{MN} (x - y)^2 dx + (x^2 + y^2 - 1) dy = \\ &= \int_0^{\pi/2} [(2 \cos t - 2 \sin t)^2 (-2 \sin t) + 3 \cdot 2 \cos t] dt = \int_0^{\pi/2} [6 \cos t - 8(\sin t - \sin 2t \sin t)] dt = \\ &= 6 \sin t + 8 \cos t \Big|_0^{\pi/2} + 8 \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sin t dt = 6 - 8 + 16 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt = \\ &= -2 + 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t d(\sin t) = -2 + 16 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Задача №6

Вычислить все значения величины A .

Таблица №6

1	$A = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$	16	$A = \sqrt[5]{-\sqrt{25i} + \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)}$
2	$A = \sqrt{1 + \sqrt[3]{i}}$	17	$A = \sqrt[7]{6 + 3i + \sqrt{-9}}$
3	$A = \sqrt[5]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \sqrt{i}$	18	$A = \sqrt[9]{10 + 5i + \sqrt{-25}}$
4	$A = \sqrt[3]{\sqrt{i} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}}$	19	$A = \sqrt[5]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \sqrt[3]{-1}}$
5	$A = \sqrt[5]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$	20	$A = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} + \sqrt[4]{-1}$
6	$A = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}i - \sqrt{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$	21	$A = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} + \sqrt[5]{-1}$
7	$A = \sqrt[5]{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{-i}$	22	$A = \sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} - \sqrt[3]{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}$
8	$A = \sqrt{\frac{1+i}{12}} - \sqrt[5]{\frac{-1-i}{\sqrt{2}}}$	23	$A = \sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} - \sqrt[7]{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$
9	$A = \sqrt{-2i} + \sqrt[4]{-16}$	24	$A = \sqrt[3]{-3i} + \sqrt{-9}$
10	$A = \sqrt[10]{\frac{1+i}{1-i}}$	25	$A = \sqrt[7]{\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}}$
11	$A = \sqrt[5]{\frac{-\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i}}$	26	$A = \sqrt[6]{\frac{-1-i}{1-i}}$
12	$A = \sqrt[10]{10 + \sqrt{-100}}$	27	$A = \sqrt[9]{9 - \sqrt{-81}}$
13	$A = \sqrt[12]{-12 - \sqrt{-144}}$	28	$A = \sqrt[11]{11i + \sqrt{-121}}$
14	$A = \sqrt[7]{-7 - \sqrt{-49}}$	29	$A = \sqrt[10]{i(1-i) + \sqrt{2i}}$
15	$A = \sqrt[7]{\frac{1+i}{i}} + \sqrt{-2i}$	30	$A = \sqrt[5]{i(1+i) + \sqrt{2i^3}}$

Образец решения задачи №6

Найдём все значения выражения $A = \sqrt[7]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{27}}}$.

Прежде всего, вычислим $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$. Все три значения содержатся в формуле

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} e^{i \frac{2\pi k}{3}}, \quad (k = 0, 1, 2).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = e^{i \frac{\pi}{3}} - e^{i \frac{2\pi k}{3}}, \quad (k = 0, 1, 2).$$

При $k = 0$:

$$A = \sqrt[7]{e^{i \frac{\pi}{3}} - 1} = \sqrt[7]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = \sqrt[7]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[7]{e^{i \frac{2\pi}{3}}} = e^{i \left(\frac{2\pi}{21} + \frac{2\pi n}{7} \right)},$$

$(n = 0, 1, 2, \dots, 6).$

При $k = 1$:

$$A = \sqrt[7]{e^{i \frac{\pi}{3}} - e^{i \frac{2\pi}{3}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[7]{1} = e^{i \frac{2\pi p}{7}},$$

$(p = 0, 1, 2, \dots, 6).$

При $k = 2$:

$$A = \sqrt[7]{e^{i \frac{\pi}{3}} - e^{i \frac{4\pi}{3}}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[7]{2} e^{i \left(\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7} \right)},$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, 6).$

Задача №7

Найти модуль и аргумент производной от заданной функции $f(z)$.

Таблица №7

1	$f(z) = \ln(z^2 - (2i + 2)z + 2i - 1)$	16	$f(z) = \frac{z + i}{2z + 5}$
2	$f(z) = \operatorname{arctg}(3z + 2)$	17	$f(z) = \ln(z^2 - (i + 2)z + i + 1)$
3	$f(z) = e^{-z}(5z - 1)$	18	$f(z) = \operatorname{arctg}(z^3 / 8)$
4	$f(z) = \ln(z^2 + 1)$	19	$f(z) = e^{2z}(z + i)$
5	$f(z) = \operatorname{arctg}(z^2 / 2)$	20	$f(z) = \ln(z^2 - 2z + 1 - 2i)$
6	$f(z) = e^z(z + 2i)$	21	$f(z) = \operatorname{arctg}(z - 3i)$
7	$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 3}$	22	$f(z) = 3z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 12z + 13$
8	$f(z) = \operatorname{arctg}(2z - 1)$	23	$f(z) = 3z^4 + 4iz^3 - 6z^2 - 12iz + 17$
9	$f(z) = e^{3z}(7 - z)$	24	$f(z) = 3z^4 + 4iz^3 + 6z^2 + 12iz + 1$
10	$f(z) = \ln(z^2 + z + 2i + 4)$	25	$f(z) = z^{13} - 13z + 13$
11	$f(z) = \sin z + e^{-iz} \left(-\frac{i}{2} \right)$	26	$f(z) = e^{3z+1}z$
12	$f(z) = \cos z + \left(\frac{1}{2} \right) e^{-iz}$	27	$f(z) = \ln(z^2 + 2)$
13	$f(z) = \frac{2z + 5}{i + 3z}$	28	$f(z) = \operatorname{arctg}(7 + 5z)$
14	$f(z) = \operatorname{arctg}(i - 3z)$	29	$f(z) = \frac{1 - 5z}{2z + i}$
15	$f(z) = \ln(z^2 - (1 + 3i)z + 3i)$	30	$f(z) = z^{13} + 13z - 13$

Образец решения задачи №7

Пусть $f(z) = \ln(z^2 - 2z + 2)$. Производную от этой функции вычисляем по обычным правилам:

$$f'(z) = \frac{2z - 2}{z^2 - 2z + 2}.$$

Разложим на линейные множители знаменатель этой дроби.
Для этого найдём корни уравнения:

$$z^2 - 2z = 2 = 0,$$

$$z = \frac{2 + \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Таким образом, получаем:

$$f'(z) = 2 \frac{z-1}{(z-1-i)(z-1+i)}.$$

Находим модуль $f'(z)$:

$$|f'(z)| = 2 \frac{|z-1|}{|z-1-i| \cdot |z-1+i|} = 2 \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}.$$

Для определения $\arg f'(z)$ найдём аргументы каждого линейного множителя в $f'(z)$:

$$\varphi_1 = \arg(z-1) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x-1}\right),$$

$$\varphi_2 = \arg(z-1-i) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y-1}{x-1}\right),$$

$$\varphi_3 = \arg(z-1+i) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y+1}{x-1}\right).$$

Следовательно, аргумент производной $f'(z)$ равен:

$$\arg f'(z) = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3.$$

Задача №8

Вычислить несобственный интеграл.

Таблица №8

1	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$	16	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)}$
2	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+3)dx}{1+x^4}$	17	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{13x^3+11x+3}{4+x^6} dx$
3	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+3x+1}{1+x^6} dx$	18	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-2x^3+6x^2-8x+8}$
4	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-2x^3+3x^2-2x+2}$	19	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-x)}{4+x^4} dx$
5	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x^3-2x-3}{8+x^6} dx$	20	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^6+4} dx$
6	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{7x+5}{16+x^4} dx$	21	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x+7}{(x^2+1)^2} dx$
7	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+1}{(4+x^2)^2} dx$	22	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3-x}{x^4+12x^2+11} dx$
8	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$	23	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3-x+5}{x^6+1} dx$
9	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-6x^3+11x^2-6x+10}$	24	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x+3}{x^4+7x^2+12} dx$
10	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8x+1}{16+x^4} dx$	25	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$
11	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx$	26	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)} dx$
12	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$	27	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(9+x^2)^3}$
13	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)}{x^4+8x^2+15} dx$	28	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4-4x^3+6x^2-4x+5}$
14	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x+2}{1+x^4} dx$	29	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x-7}{x^4+4} dx$

15	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{8+x^6} dx$	30	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{64+x^6}$
----	---	----	--

Образец решения задачи №8

Найдём значение несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{(1+x^2)^3} dx$.

Прежде всего, очевидно, что этот интеграл сходится (в качестве функции сравнения можно взять $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$). Представим этот интеграл в виде суммы интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3 + x + 1}{(1+x^2)^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3}{(1+x^2)^3} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^3} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Первые два интеграла обратятся в ноль, поскольку подынтегральные функции нечётны. Поэтому достаточно найти значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$. Этот интеграл вычислим с помощью вычетов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(1+z^2)^3}.$$

В последнем интеграле контур C_R состоит из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности радиуса R в верхней полуплоскости z . Функция $F(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$ имеет полюсы $z = \pm i$. Найдём вычет в полюсе $z = i$.

$$\begin{aligned} \text{Вычет } F(z)|_{z=i} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left((z-i)^3 F(z) \right) \Big|_{z=i} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z+i} \right)^3 \Big|_{z=i} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{12}{(z+i)^5} \Big|_{z=i} = \frac{6}{(2i)^5} = -\frac{3}{16} i. \end{aligned}$$

По теореме о вычетах искомый интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi i \left(-\frac{3}{16} i \right) = \frac{3}{8} \pi.$$

Задача №9

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Таблица №9

1	$(1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) -$ $-(1+y^2)dy = 0$	16	$6x dx - 2y dy =$ $= 2yx^2 dy - 3xy^2 dx$
2	$2e^x \operatorname{tg} y dx +$ $+(1+e^x) \sec^2 y dy = 0$	17	$x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$
3	$(xy^2 + x)dy +$ $+(x^2 y - y)dx = 0$	18	$\sqrt{5+y^2} dx +$ $+4(x^2 y + y)dy = 0$
4	$y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$	19	$20x dx - 3y dy =$ $= 3x^2 y dy - 5xy^2 dx$
5	$\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} \cdot y \cdot y' = 0$	20	$2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} y = 0$
6	$3(x^2 y + y)dy +$ $+\sqrt{2+y^2} dx = 0$	21	$\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$
7	$\sqrt{4-x^2} \cdot y' + xy^2 + x = 0$	22	$(1+e^x)y' = ye^x$
8	$y' \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$	23	$y \cdot (1 + \ln y) + (x^2 + 3) \cdot y' = 0$
9	$x\sqrt{1+y^2} + y' \cdot y \cdot \sqrt{1+x^2} = 0$	24	$y \cdot \ln y + x \cdot y' = 0$
10	$(1+e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$	25	$y \cdot (1 + \ln y) + x \cdot y' = 0$
11	$(yx^2 + y)dx +$ $+(y^2 x - x)dy = 0$	26	$\sqrt{5+x^2} dy + 4(y^2 x + x)dx = 0$
12	$(1+e^y)dy - xe^y dx = 0$	27	$\sqrt{3+x^2} dy - x dx = y^2 x dx$
13	$(y+1)x \cdot \ln x \cdot dx + y dy = 0$	28	$\sqrt{1-x^2} \cdot y dy + \sqrt{1-y^2} dx = 0$
14	$\sqrt{4-y^2} dx + (yx^2 + y)dy = 0$	29	$y dy - x dx = xy^2 dx - yx^2 dy$
15	$6y dy - 2x dx =$ $= 2xy^2 dx - 3yx^2 dy$	30	$(2y + 2yx^2)dy +$ $+\sqrt{2-y^2} dx = 0$

Образец решения задачи №9

Найдём общее решение дифференциального уравнения:

$$y \ln y dx + (1 + x^2) dy = 0$$

Прежде всего, разделим переменные

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{y \ln y} = 0$$

После интегрирования находим общий интеграл.

$$\arctg x + \ln |\ln y| = C$$

Непосредственно убеждаемся, что $y = 1$ является решением нашего уравнения. Это особое решение, оно не входит в состав общего решения ни при каком значении постоянной C .

Задача №10

Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения.

Таблица №10

1	$(x^2 + xy)y' =$ $= x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$	16	$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$
2	$(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$	17	$xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$
3	$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$	18	$xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$
4	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$	19	$y' = \frac{2x + 3y}{y - 2x}$
5	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{x}{y} + 8$	20	$(x - y)dx + xdy = 0$
6	$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$	21	$y' = \frac{8}{x}y + \frac{y^2}{x^2} + 12$
7	$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$	22	$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
8	$xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$	23	$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
9	$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$	24	$y' = \frac{x + y}{x - y}$
10	$xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$	25	$y' = y/x + \sin(y/x)$
11	$(y^2 + xy)y' =$ $= y\sqrt{y^2 - x^2} + yx + x^2$	26	$(y - x)dy + ydx = 0$
12	$(\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$	27	$y' = \frac{2x + y}{2y - x}$
13	$(x + \sqrt{x^2 + y^2})dy - ydx = 0$	28	$yy' = x \ln(x/y)$
14	$yy' = \sqrt{x^2 + y^2} + x$	29	$y' = y/x + \cos^2(x/y)$
15	$yy' = \frac{3x^3 + 14xy^2}{2x^2 + 7y^2}$	30	$y' = y/x + e^{y/x}$

Образец решения задачи №10

Найдём общий интеграл однородного уравнения:

$$xy' = y - x \cdot \cos(y/x).$$

Сделаем замену $z = y/x$. После этого получим уравнение относительно функции z .

$$z + xz' = z - \cos z.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{\cos z} = -\frac{dx}{x}$$

После интегрирования получаем:

$$\int \frac{dz}{\cos z} + \ln|x| = C.$$

Вычислим интеграл, входящий в последнюю формулу:

$$\int \frac{dz}{\cos z} = \int \frac{\cos z dz}{1 - \sin^2 z} = \int \frac{d(\sin z)}{1 - \sin^2 z} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin z)}{1 - \sin z} + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin z)}{1 + \sin z} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right)$$

Таким образом, получаем общее решение

$$\ln \sqrt{\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}} + \ln x = C.$$

Возвращаемся к старой переменной y и окончательно находим общий интеграл исходного уравнения:

$$x \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin(y/x)}{1 - \sin(y/x)}} = C.$$

Если $\sin(y/x) = 1$, т.е. $y = (\pi/2 + 2\pi n)x$, то подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что эти функции являются решением. Итак, данное уравнение имеет бесконечно много особых решений.

$$y = \frac{4n+1}{2} \pi x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача №11

Решить задачу Коши для линейного уравнения 1-го порядка.

Таблица №11

1	$y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad y(0) = 0$	16	$y' + 2xy = x \sin x; \quad y(0) = 0$
2	$y' + 2y = e^{3x}; \quad y(0) = 0$	17	$y' - y \cos x = \sin 2x; \quad y(0) = -1$
3	$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 1; \quad y(\pi/4) = 1$	18	$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}; \quad y(1) = 0$
4	$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}; \quad y(0) = 0$	19	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3; \quad y(0) = 0$
5	$y' = 2y + e^x - x; \quad y(0) = 1/4$	20	$y' - 4xy = -4x^3; \quad y(0) = 0$
6	$y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1; \quad y(1) = 0$	21	$y' - \frac{y}{x} = x \sin x; \quad y(\pi/2) = 1$
7	$y' = \frac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2; \quad y(0) = 0$	22	$y' - \frac{y}{x} = -2 \frac{\ln x}{x}; \quad y(1) = 0$
8	$y' + \frac{y}{x} = \sin x; \quad y(\pi) = 1/\pi$	23	$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}; \quad y(1) = 1$
9	$y' + \frac{y}{x} = 3x; \quad y(1) = 1$	24	$y' - \frac{y}{x} = 3x^2; \quad y(3) = 0$
10	$y' + xy = -x^3; \quad y(0) = 3$	25	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x; \quad y(-3) = 0$
11	$y' = 3y + e^{2x} + x - 1; \quad y(0) = 1$	26	$-y' + \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2}; \quad y(1) = 0$
12	$y' + \operatorname{ctg} x \cdot y = 7; \quad y(\pi/4) = 1$	27	$x^2 y' - 3xy = -2x^2; \quad y(1) = 1$
13	$y' + 5y = 3xe^{-x^2}; \quad y(0) = 0$	28	$2x^2 y' + 5xy = 7x^2; \quad y(1) = 0$
14	$y' + y \cdot \sin x = \sin 2x; \quad y(0) = 0$	29	$xy' + y = x \cdot \ln x; \quad y(1) = 0$
15	$y' + 3xy = -x + x^2; \quad y(0) = 0$	30	$y' - \frac{3y}{x+5} = (x+1)^3; \quad y(0) = 0$

Образец решения задачи №11

Найдём решение задачи Коши:

$$y' + \frac{y}{x+2} = e^{2x} + 2x + 1, \quad y(0) = 0.$$

Решение линейных уравнений проводят в два этапа. Сначала находят общее решение однородного уравнения

$$y' + \frac{y}{x+2} = 0.$$

Это уравнение – с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя находим:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x+2}, \\ \ln|y| + \ln|x+2| &= \ln C, \\ y &= \frac{C}{x+2}.\end{aligned}$$

На втором этапе ищут частное решение неоднородного уравнения. Для этой цели служит метод вариации постоянной C .

Сущность метода состоит в следующем. Будем искать частное решение в виде:

$$y = \frac{C(x)}{x+2}, \text{ где } C(x) \text{ – неизвестная функция.}$$

Осуществляя постановку предполагаемого решения в исходное уравнения находим:

$$\begin{aligned}\frac{C'}{x+2} - \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^2} &= e^{2x} + 2x + 1, \\ C' &= e^{2x}(x+2) + (2x+1)(x+2), \\ C(x) &= \int e^{2x}(x+2)dx + \int (2x+1)(x+2)dx = \frac{e^{2x}}{2}(x+2) - \frac{e^{2x}}{4} + \\ &+ \frac{(x+2)^2}{2}(2x+1) - \frac{(x+2)^3}{6} \cdot 2 = \frac{e^{2x}}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{(x+2)^2}{2}\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения найдено:

$$y = \frac{C(x)}{x+2} = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(\frac{2x+3}{x+2}\right) + \frac{1}{6}(x+2)(4x-1).$$

Общее решение линейного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, т.е.

$$y = \frac{C}{x+2} + \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(\frac{2x+3}{x+2}\right) + \frac{1}{6}(x+2)(4x-1).$$

Из начального условия $y(0) = 0$ определяем постоянную C :

$$0 = \frac{C}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{5}{6}.$$

Решение задачи Коши найдено:

$$y = -\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(\frac{2x+3}{x+2} \right) + \frac{1}{6}(x+2)(4x-1).$$

Задача №12

Проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах

Таблица №12

1	$(5x + y^2)dx + (2xy - 3y)dy = 0$
2	$(x^2 + 2xy + x^2y + 2x - 1)dx + \left(2y + x^2 + \frac{x^3}{3} + 1\right)dy = 0$
3	$(e^x + x \sin y)dx + \left(\sin y + \frac{x^2 \cos y}{2}\right)dy = 0$
4	$(\ln x - x \sin y)dx + \left(\ln y - \frac{x^2}{2}e^y\right)dy = 0$
5	$(x^2 + x - 1 - y^2 + y)dx + (2y^3 + y^2 + x - 2xy)dy = 0$
6	$(\sin x + x \cos y)dx + \left(\cos y - \frac{x^2 \sin y}{2}\right)dy = 0$
7	$(2y + e^x - y \ln y)dx + x(1 - \ln y)dy = 0$
8	$(y^2 e^x + y - \sin x)dx + (2ye^x + x)dy = 0$
9	$(y \operatorname{tg} y + y^2 + 2y - 5)dx + (2xy + 2x - \ln(\cos x) + 3)dy = 0$
10	$(y \sin x + 2xy - y)dx + (x^2 - x - \cos x)dy = 0$
11	$\left(-\cos y - \frac{y^2}{2} + x^2 + x + 1\right)dx + (x \sin y + y^2 - xy + 1)dy = 0$
12	$(\operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} x)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 y} + \operatorname{tg} y\right)dy = 0$

13	$(e^x + \ln x)dx + (xe^y + \ln y)dy = 0$
14	$(\operatorname{arctgy} + \arcsin x)dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + \arcsin y\right)dy = 0$
15	$\left(\frac{x^2 y^2}{2} + \ln x\right)dx + \left(\frac{x^3 y}{3} + e^y\right)dy = 0$
16	$\left(x \ln x - \frac{y}{1+x^2}\right)dx + (\operatorname{arctgx} + ye^y)dy = 0$
17	$\left(\frac{y}{1+x^2} + \operatorname{arctgx}\right)dx + (\operatorname{arctgx} + \arcsin y)dy = 0$
18	$(ye^x + \ln x)dx + (e^x + \ln y)dy = 0$
19	$\left(\operatorname{tg} x + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctgy})dy = 0$
20	$(y \sin x + x^2 - xy + 1)dx + \left(y^2 + y - \frac{x^2}{2} - \cos x\right)dy = 0$
21	$\left(\frac{x^2 y^2}{2} - \sin x\right)dx + \left(\frac{x^3 y}{3} + \cos y\right)dy = 0$
22	$(y^2 - y - \cos y)dx + (x \sin y + 2xy - x)dy = 0$
23	$(2xy + 2y - \ln(\cos y))dx + (xtgy + x^2 + 2x - 5)dy = 0$
24	$(2xe^y + y)dx + (x^2 e^y + x - \sin y)dy = 0$
25	$(y - y \ln x)dx + (2x + e^y - x \ln x)dy = 0$
26	$\left(\cos x - \frac{y^2}{2} \sin x\right)dx + (\sin y + y \cos x)dy = 0$
27	$(2x^3 + x^2 + y - 2xy)dx + (y^2 + y - 1 - x^2 - x)dy = 0$

28	$\left(\ln x - \frac{y^2}{2}e^x\right)dx + (\ln y - ye^x)dy = 0$
29	$\left(\sin x + \frac{y^2}{2}\cos x\right)dx + (e^y + y\sin x)dy = 0$
30	$(\sin x + y)dx + (x - \cos y)dy = 0$

Образец решения задачи № 12

Рассмотрим уравнение, записанное в дифференциальной форме

$$(y^2 \sin x - 2y + e^x)dx + (-2y \cos x - 2x + e^y)dy = 0.$$

В этом уравнении $P(x, y) = y^2 \sin x - 2y + e^x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \sin x - 2$,
 $Q(x, y) = -2y \cos x - 2x + e^y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \sin x - 2$. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, левая часть заданного уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$: $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Определим эту функцию. Из равенства $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ следует, что

$$U = \int P dx + f(y) = \int (y^2 \sin x - 2y + e^x) dx + f(y) = -y^2 \cos x - 2xy + e^x + f(y).$$

Чтобы определить неизвестную функцию $f(y)$ воспользуемся другим равенством $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ и получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2y \cos x - 2x + \frac{df}{dy} = -2y \cos x - 2x + e^y.$$

Отсюда

$$\frac{df}{dy} = e^y \Rightarrow f(y) = e^y.$$

Таким образом, получаем общее решение исходного уравнения в виде $U(x, y) = C$, то есть

$$e^x + e^y - y^2 \cos x - 2xy = C.$$

Задача №13

Найти общее решение уравнения Эйлера.

Таблица №13

1	$x^2 y'' - 8xy' + 14y = 0$	16	$3x^2 y'' + 3xy' + 7y = 0$
2	$3x^2 y'' - xy' + y = 0$	17	$5x^2 y'' - xy' + y = 0$
3	$x^2 y'' - 4xy' + 3y = 0$	18	$x^2 y'' - 6xy' + 5y = 0$
4	$5x^2 y'' - 9xy' - 3y = 0$	19	$x^2 y'' - xy' - 4y = 0$
5	$3x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$	20	$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$
6	$4x^2 y'' + 4xy' - 9y = 0$	21	$5x^2 y'' + 14xy' - 2y = 0$
7	$x^2 y'' + xy' - 2y = 0$	22	$5x^2 y'' + 5xy' + 7y = 0$
8	$x^2 y'' + 7xy' + 5y = 0$	23	$9x^2 y'' + 9xy' + 4y = 0$
9	$4x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$	24	$4x^2 y'' - 7xy' + 7y = 0$
10	$3x^2 y'' - 4xy' + 2y = 0$	25	$-x^2 y'' - xy' + 4y = 0$
11	$4x^2 y'' - 12xy' + 3y = 0$	26	$x^2 y'' + 7xy' - 9y = 0$

12	$9x^2y'' + 9xy' - 4y = 0$	27	$7x^2y'' + 7xy' - 9y = 0$
13	$2x^2y'' + 2xy' + 7y = 0$	28	$3x^2y'' - 14xy' + 10y = 0$
14	$2x^2y'' - 4xy' - 14y = 0$	29	$3x^2y'' + 23xy' - 7y = 0$
15	$5x^2y'' + 5xy' + 11y = 0$	30	$4x^2y'' + 4xy' + 9y = 0$

Образец решения задачи №13

Решим уравнение Эйлера второго порядка

$$4x^2y'' + 7xy' - 10y = 0$$

Перейдём к новой независимой переменной t по формуле $x = e^t$, тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{de^t} = e^{-t} \frac{dy}{dt} = e^{-t} \dot{y}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(e^{-t} \dot{y})}{de^t} = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$$

Исходное уравнение после этой замены преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$4\ddot{y} + 3\dot{y} - 10y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$4k^2 + 3k - 10 = 0.$$

имеет два корня $x_1 = -2$ и $x_2 = \frac{5}{4}$.

Следовательно,

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{\frac{5}{4}t}.$$

Возвращаемся к переменной $x = e^t$ и окончательно получаем

$$y(t) = C_1 e^{-2 \ln x} + C_2 e^{\frac{5}{4} \ln x} = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^{\frac{5}{4}}.$$

Задача №14

Найти общее решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Таблица №14

1	$y''' - 3y'' + 4y = 0$	16	$y^{(IV)} - 7y''' + 17y'' - 17y' + 6y = 0$
2	$y^{(IV)} - 4y'' - 5y = 0$	17	$y''' - 2y'' - y' - 4y = 0$
3	$y^{(IV)} + 3y'' + 2y = 0$	18	$y''' - 7y'' + 5y' - 35y = 0$
4	$y''' - 5y'' - 2y' - 24y = 0$	19	$y''' - y'' - 4y' - 4y = 0$
5	$y^{(IV)} - 10y''' + \frac{1}{2}y' - 5y = 0$	20	$y''' + y'' + y' + y = 0$
6	$y^{(IV)} - 13y''' + 56y'' - 92y' + 48y = 0$	21	$2y^{(IV)} + 3y'' + y = 0$
7	$y''' - 9y'' + 23y' + 15y = 0$	22	$y^{(IV)} + 2y'' - 15y = 0$
8	$y^{(IV)} - 3y''' - 7y'' + 27y' - 18y = 0$	23	$y''' - 7y' + 6y = 0$
9	$y^{(IV)} + 8y'' + 15y = 0$	24	$y''' - 11y'' - y' + 11y = 0$
10	$y''' - 3y'' + 2y' + 6y = 0$	25	$y^{(IV)} + 13y'' + 36y = 0$
11	$y''' - 5y'' + 3y' - 15y = 0$	26	$y''' - 4y'' + 3y' + 12y = 0$
12	$y^{(IV)} - y'' - 12y = 0$	27	$y^{(IV)} - 7y'' + 12y = 0$

13	$y''' + 5y'' + y' + 5y = 0$	28	$y^{(IV)} - 2y''' - 8y'' + 18y' - 9y = 0$
14	$y^{(IV)} - 3y''' + y'' + 3y' - 2y = 0$	29	$y''' - 2y'' + 7y' - 14y = 0$
15	$y^{(IV)} - 3y'' + 2y = 0$	30	$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Образец решения задачи №14

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами четвёртого порядка

$$y^{(IV)} - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0$$

Ему соответствует характеристическое уравнение

$$k^4 - 3k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0,$$

которое раскладывается на множители

$$(k - 1)(k - 2)(k^2 + 4) = 0.$$

Отсюда получаем корни $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = -2i$, $k_4 = 2i$.

В соответствие, с этим получаем общее решение заданного уравнения

$$y(t) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Задача №15

Решить задачу Коши для линейного уравнения второго порядка.

Таблица № 15

1	$y'' + 2y' + y = xe^{-2x}$ $y(0) = y'(0) = 0$	16	$y'' - 2y' + y = (x-1)e^{2x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
2	$y'' - 3y' + 2y = x \sin^2 x$ $y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$	17	$y'' - 4y' + 3y = x \cdot \cos^2 x$ $y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$
3	$y'' + y' + y = (x+1) \sin 2x$ $y(0) = y'(0) = 0$	18	$y'' + 2y' + 2y = 2x \cos 3x$ $y(0) = y'(0) = 0$
4	$y'' + 7y' + 10y = x \cdot e^{-5x}$ $y(0) = y'(0) = 0$	19	$y'' + 6y' + 8y = (x+1)e^{-4x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
5	$y'' + 3y' + 3y = \cos 2x$ $y(0) = y'(0) = 0$	20	$y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
6	$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$ $y(0) = y'(0) = 0$	21	$y'' - 6y' + 36y = e^{6x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
7	$y'' - 5y' + 4y = \sin^2 x$ $y(0) = y'(0) = 0$	22	$y'' + 5y' + 4y = \cos^2 x$ $y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$
8	$y'' + 4y = x \cos x + \sin 2x$ $y(0) = y'(0) = 2$	23	$y'' + 9y = (2x+1) \sin^2 x$ $y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$
9	$y'' + 6y' + 5y = \sin 2x + \cos 3x$ $y(0) = y'(0) = 0$	24	$y'' + 49y = \sin 2x + \cos 3x$ $y(0) = y'(0) = 0$
10	$y'' + 7y' + 49y = e^{-7x}$ $y(0) = y'(0) = 0$	25	$y'' - 8y' + 64y = e^{8x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
11	$y'' + 25y = \sin x + \cos x$ $y(0) = y'(0) = 0$	26	$y'' + 6y' + 9y = xe^x + 1$ $y(0) = y'(0) = 0$
12	$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + x + 1$ $y(0) = y'(0) = 0$	27	$y'' + 2y' + 2y = x^2 + 3x + 5$ $y(0) = y'(0) = 0$
13	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 1$ $y(0) = y'(0) = 0$	28	$y'' + y = \sin x + \cos x$ $y(0) = y'(0) = 0$

14	$y'' + 16y = \sin 2x + \cos x$ $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$	29	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$ $y(0) = y'(0) = 0$
15	$y'' - 7y' + 12y = x \cos x + e^x$ $y(0) = y'(0) = 0$	30	$y'' - 9y' + 20y =$ $= x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ $y(1) = 0 \quad y'(1) = 2$

Образец решения задачи №15

Найдём решение задачи Коши:

$$y'' + 9y = x \cdot \cos^2 x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 9 = 0, \quad D = -36 < 0.$$

В этом случае общее решение однородного уравнения $y'' + 9y = 0$ представляется в виде:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольных постоянных. Напишем систему уравнений, для неизвестных функций $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' \cos 3x + C_2' \sin 3x = 0 \\ C_1' \cdot (-3) \sin 3x + C_2' \cdot 3 \cos 3x = \frac{x}{2} (1 + \cos 2x) \end{cases}$$

Вычисления показывают, что

$$C_1'(x) = -\frac{x}{6} \sin 3x - \frac{x}{12} \sin 5x - \frac{x}{12} \sin x,$$

$$C_2'(x) = \frac{x}{6} \cos 3x + \frac{x}{12} \cos x + \frac{x}{12} \cos 5x.$$

После интегрирования определяем функции $C_1(x), C_2(x)$

$$C_1(x) = -\frac{x}{6} \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) - \frac{1}{54} \sin 3x - \frac{x}{12} \left(-\frac{\cos 5x}{5} \right) - \frac{1}{300} \sin 5x -$$

$$-\frac{x}{12} (-\cos x) - \frac{1}{12} \sin x,$$

$$C_2(x) = \frac{x}{6} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{54} \cos 3x + \frac{x}{12} \sin x - \frac{1}{12} \cos x + \frac{x}{12} \cdot \frac{\sin 5x}{5} - \frac{1}{300} \cos 5x.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения найдено:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x.$$

Определяем постоянные C_1, C_2 из начальных условий.

$$y(0) = 0 = C_1 + C_1(0), \text{ но } C_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$\begin{aligned} y'(0) = 0 &= C_1(-3\sin 3x) + C_2(3\cos 3x) + C_1(x)(-3\sin 3x) + \\ &+ C_2(x)(3\cos 3x) + C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x \Big|_{x=0} = \\ &= C_2 \cdot 3 + 3 \cdot C_2(0) = 3 \cdot C_2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{54} - \frac{1}{12} - \frac{1}{300} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{54} + \frac{1}{12} + \frac{1}{300} = \frac{2 \cdot 5^2 + 5^2 \cdot 3^2 + 3^2}{5^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3} = \frac{284}{2700} = \frac{71}{675}$$

Окончательно, решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \frac{71}{675} \sin 3x + C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x.$$

Задача №16

Построить решение задачи Коши в виде степенного ряда.
Найти радиус сходимости ряда.

Таблица №16

1	$(1 + 2x^2)y'' + 3xy' = 5y = 0$ $y(0) = -1; y'(0) = 0$	16	$(5 - 2x^2)y'' - 4xy' + 7y = 0$ $y(0) = 2; y'(0) = 0$
2	$(3 - 7x^2)y'' + 5xy' - 7y = 0$ $y(0) = 5; y'(0) = 0$	17	$(5x^2 + 1)y'' - 7xy' + y = 0$ $y(0) = -\sqrt{2}; y'(0) = 0$
3	$(12x^2 + 6)y'' - 3xy' - 2y = 0$ $y(0) = -3; y'(0) = 0$	18	$(1 - x^2)y'' - xy' + 3y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$
4	$(5x^2 - 20)y'' - 5xy' - 3y = 0$ $y(0) = -1; y'(0) = 0$	19	$(12x^2 + 1)y'' - 7xy' + 2y = 0$ $y(0) = -3; y'(0) = 0$
5	$(3x^2 + 1)y'' - xy' + 2y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$	20	$(15x^2 + 3)y'' - 2xy' + 5y = 0$ $y(0) = 3; y'(0) = 0$
6	$(1 - 3x^2)y'' + 5xy' - 3y = 0$ $y(0) = \sqrt{2}; y'(0) = 0$	21	$(4x^2 - 8)y'' - 7xy' + 5y = 0$ $y(0) = \pi; y'(0) = 0$
7	$(5x^2 - 8)y'' - 3xy' + 12y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$	22	$(12x^2 - 3)y'' + 5xy' + 3y = 0$ $y(0) = -1; y'(0) = 0$
8	$(2 + 3x^2)y'' - 5xy' - 7y = 0$ $y(0) = 3; y'(0) = 0$	23	$(15x^2 + 5)y'' - 7xy' + 5y = 0$ $y(0) = -2; y'(0) = 0$
9	$(-1 - 3x^2)y'' + 17xy' + y = 0$ $y(0) = 10; y'(0) = 0$	24	$(-3 + 5x^2)y'' - xy' + 3y = 0$ $y(0) = -2; y'(0) = 0$
10	$(3x^2 + 7)y'' - 5xy' + 3y = 0$ $y(0) = -4; y'(0) = 0$	25	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 7y = 0$ $y(0) = -\sqrt{3}; y'(0) = 0$
11	$(2x^2 + 3)y'' + 4xy' + 7y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$	26	$(7x^2 + 5)y'' + 3xy' - 2y = 0$ $y(0) = -2; y'(0) = 0$
12	$(5x^2 + 1)y'' - 3xy' + 9y = 0$ $y(0) = 3; y'(0) = 0$	27	$(10x^2 + 5)y'' + 4xy' - y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$

13	$(4x^2 + 3)y'' - 2xy' + 3y = 0$ $y(0) = 2; y'(0) = 0$	28	$(-2x^2 + 1)y'' + 3xy' - 10y = 0$ $y(0) = 2; y'(0) = 0$
14	$(7x^2 + 1)y'' + 3xy' + 5y = 0$ $y(0) = -1; y'(0) = 0$	29	$(3x^2 + 4)y'' - 2xy' - 3y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$
15	$(9x^2 + 3)y'' + 5xy' + 7y = 0$ $y(0) = 1; y'(0) = 0$	30	$(1 - 16x^2)y'' - 8xy' - y = 0$ $y(0) = 2; y'(0) = 0$

Образец решения задачи №16

Решим следующую задачу Коши:

$$(2x^2 + 5)y'' - 7x \cdot y' + 3y = 0$$

$$y(0) = 5; y'(0) = 0.$$

Будем искать решение этой задачи в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \text{ где } a_0 = 5, \quad a_1 = 0.$$

Остальные коэффициенты ряда определим после подстановки предполагаемого решения в уравнение. Вычисления дают:

$$(2x^2 + 5)y'' = 10a_2 + 30a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n (2a_n n(n-1) + 5a_{n+2}(n+2)(n+1)),$$

$$-7xy' = -7a_1x - 7 \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n,$$

$$3y = 3a_0 + 3a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 3a_n x^n.$$

Складывая написанные три равенства, получаем результат подстановки ряда в исходное уравнение.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n (2n^2 - 9n + 3) + 5a_{n+2}(n+2)(n+1))x^n + \\ + 3a_0 + 10a_2 + (30a_3 - 4a_1)x = 0.$$

В силу начальных условий $a_0 = 5, \quad a_1 = 0$. Для определения неизвестных a_n получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3a_0 + 10a_2 = 0 \\ 30a_3 - 4a_1 = 0 \\ a_n (2n^2 - 9n + 3) + a_{n+2} 5(n+2)(n+1) = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}.$$

Последовательно находим

$$a_2 = -\frac{3}{10}a_0 = -\frac{3}{2}$$

$$a_3 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_7 = 0, \dots$$

Четные коэффициенты a_n определяются из последнего уравнения

$$a_{n+2} = -\frac{2n^2 - 9n + 3}{5(n+2)(n+1)}a_n \quad (n = 2, 4, 6, \dots).$$

Для нахождения радиуса сходимости ряда можно использовать формулу

$$R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+2)(n+1)}{2n^2 - 9n + 3} = \frac{5}{2}, \text{ отсюда } R = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Задача №17

Решить задачу Коши с помощью преобразования Лапласа.

Таблица №17

1	$\dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y$ $\dot{y} = x + y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$	16	$\dot{x} = 3x - y$ $\dot{y} = \frac{1}{4}x + 3y,$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0$
2	$\dot{x} = x + 8y$ $\dot{y} = -\frac{1}{16}x + 2y,$ $x(0) = y(0) = -1$	17	$\dot{x} = 3x + y$ $\dot{y} = -\frac{1}{2}x + 4y,$ $x(0) = y(0) = 1$
3	$\dot{x} = 5x + y$ $\dot{y} = -x + 5y,$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -2$	18	$\dot{x} = 6x - y$ $\dot{y} = x + 6y,$ $x(0) = y(0) = 1$
4	$\dot{x} = 2x + 2y$ $\dot{y} = -x + 4y,$ $x(0) = -2, \quad y(0) = 3$	19	$\dot{x} = 4x - y$ $\dot{y} = 2x + 2y,$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1$
5	$\dot{x} = 5x - y$ $\dot{y} = 2x + 3y,$ $x(0) = y(0) = 5$	20	$\dot{x} = 6x + 5y$ $\dot{y} = -\frac{1}{2}x + 5y,$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 2$
6	$\dot{x} = 3x - \frac{1}{4}y$ $\dot{y} = 9x + 3y,$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5$	21	$\dot{x} = 2x - 4y$ $\dot{y} = x + 2y,$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 2$
7	$\dot{x} = x + y$ $\dot{y} = -4x + y,$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 5$	22	$\dot{x} = 5x + 5y$ $\dot{y} = -x + 3y,$ $x(0) = y(0) = 2$
8	$\dot{x} = x - 13y$ $\dot{y} = \frac{1}{2}x + 2y,$ $x(0) = y(0) = 1$	23	$\dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y$ $\dot{y} = -13x + 3y,$ $x(0) = y(0) = 3$

9	$\dot{x} = 9x - 5y$ $\dot{y} = x + 5y,$ $x(0) = y(0) = 2$	24	$\dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y$ $\dot{y} = -13x + y,$ $x(0) = y(0) = 6$
10	$\dot{x} = 7x - 5y$ $\dot{y} = x + 3y,$ $x(0) = y(0) = -1$	25	$\dot{x} = 5x + y$ $\dot{y} = -5x + y,$ $x(0) = y(0) = 1$
11	$\dot{x} = 4x + y$ $\dot{y} = -5x + 8y,$ $x(0) = -3, \quad y(0) = 0$	26	$\dot{x} = 3x - y$ $\dot{y} = 5x + 7y,$ $x(0) = 0, \quad y(0) = -5$
12	$\dot{x} = 5x - 4y$ $\dot{y} = x + 5y,$ $x(0) = y(0) = -1$	27	$\dot{x} = 4x + 2y$ $\dot{y} = -2x + 4y,$ $x(0) = y(0) = -3$
13	$\dot{x} = 7x + y$ $\dot{y} = -4x + 7y,$ $x(0) = y(0) = -2$	28	$\dot{x} = 2x - 2y$ $\dot{y} = 2x + 2y,$ $x(0) = y(0) = -2$
14	$\dot{x} = 9x - 4y$ $\dot{y} = x + 9y,$ $x(0) = y(0) = -5$	29	$\dot{x} = 8x - 2y$ $\dot{y} = 2x + 8y,$ $x(0) = y(0) = -4$
15	$\dot{x} = 3x + \frac{1}{4}y$ $\dot{y} = -5x + y,$ $x(0) = y(0) = -6$	30	$\dot{x} = 5x - 5y$ $\dot{y} = \frac{1}{4}x + 3y,$ $x(0) = y(0) = -7$

Образец решения задачи №17

Решим с помощью преобразования Лапласа задачу Коши:

$$\dot{x} = 3x - \frac{1}{2}y$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}x + 3y,$$

$$x(0) = y(0) = -1.$$

Прежде всего, напомним линейную систему для образов:

$$pX + 1 = 3X - \frac{1}{2}Y$$

$$pY + 1 = \frac{1}{2}X + 3Y.$$

Запишем эту систему в стандартном виде:

$$(3-p)X - \frac{1}{2}Y = 1$$

$$\frac{1}{2}X + (3-p)Y = 1.$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3-p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3-p & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3-p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{7}{2}-p}{(3-p)^2 + \frac{1}{4}},$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 3-p & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3-p & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3-p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{5}{2}-p}{(3-p)^2 + \frac{1}{4}}.$$

Функции X, Y имеют простые полюсы $p = 3 \pm i/2$.

Искомое решение получаем по формулам обращения:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p) e^{pt} dp,$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} Y(p) e^{pt} dp, \text{ где } a > 3.$$

Написанные интегралы без труда вычисляются с помощью теоремы о вычетах. Проведём соответствующие вычисления:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(7/2-p)e^{pt} dp}{(p-3-i/2)(p-3+i/2)} = \\
&= \frac{7/2-3-i/2}{i} e^{(3+i/2)t} + \frac{7/2-3+i/2}{-i} e^{(3-i/2)t} = \\
&= e^{3t} \left((-1/2-i/2)e^{\frac{i}{2}t} + (-1/2+i/2)e^{-\frac{i}{2}t} \right) = \\
&= \sqrt{2} e^{3t} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(5/2-p)e^{pt} dp}{(p-3-i/2)(p-3+i/2)} = \\
&= \frac{-1/2-i/2}{i} e^{(3+i/2)t} + \frac{-1/2+i/2}{-i} e^{(3-i/2)t} = \\
&= e^{3t} \left((-1/2+i/2)e^{\frac{i}{2}t} + (-1/2-i/2)e^{-\frac{i}{2}t} \right) = \\
&= \sqrt{2} e^{3t} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Задача №18

Исследовать на устойчивость системы ОДУ

1	$\frac{dx}{dt} = -4x, \frac{dy}{dt} = -2y.$	16	$\frac{dx}{dt} = -9x - y, \frac{dy}{dt} = -x + y.$
2	$\frac{dx}{dt} = -8y, \frac{dy}{dt} = 8x.$	17	$\frac{dx}{dt} = -x - 9y, \frac{dy}{dt} = x + y.$
3	$\frac{dx}{dt} = 10x, \frac{dy}{dt} = 10y.$	18	$\frac{dx}{dt} = -5x, \frac{dy}{dt} = x - 3y.$
4	$\frac{dx}{dt} = 8x + 2, \frac{dy}{dt} = 2x + 2y.$	19	$\frac{dx}{dt} = 10y, \frac{dy}{dt} = -y.$
5	$\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = 3y.$	20	$\frac{dx}{dt} = 4x + 4y, \frac{dy}{dt} = 5x - 5y.$
6	$\frac{dx}{dt} = -9x + 6y, \frac{dy}{dt} = 3 - 12y.$	21	$\frac{dx}{dt} = -x, \frac{dy}{dt} = -y.$
7	$\frac{dx}{dt} = -4 + 8y, \frac{dy}{dt} = 4x + 4y.$	22	$\frac{dx}{dt} = 9y, \frac{dy}{dt} = 2x - y.$
8	$\frac{dx}{dt} = -15x + 10y, \frac{dy}{dt} = 5 - 20y.$	23	$\frac{dx}{dt} = x + 4y, \frac{dy}{dt} = x - 4y.$
9	$\frac{dx}{dt} = -6x + 12y, \frac{dy}{dt} = x + y.$	24	$\frac{dx}{dt} = 20x - 5y, \frac{dy}{dt} = 4x - y.$
10	$\frac{dx}{dt} = -x - 10y, \frac{dy}{dt} = x - y.$	25	$\frac{dx}{dt} = x - y, \frac{dy}{dt} = x + 5y.$
11	$\frac{dx}{dt} = x - 8y, \frac{dy}{dt} = x - y.$	26	$\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x - 7y.$
12	$\frac{dx}{dt} = -x - 9y, \frac{dy}{dt} = x + y.$	27	$\frac{dx}{dt} = -2x - 11y, \frac{dy}{dt} = x - y.$
13	$\frac{dx}{dt} = -2x - 2y, \frac{dy}{dt} = 3x - 3y.$	28	$\frac{dx}{dt} = 5x - 2y, \frac{dy}{dt} = -x - y.$
14	$\frac{dx}{dt} = x + y, \frac{dy}{dt} = 4x + 4y.$	29	$\frac{dx}{dt} = -4x - 22y, \frac{dy}{dt} = x - y.$
15	$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -5x - 25y.$	30	$\frac{dx}{dt} = -2y, \frac{dy}{dt} = x + 2y.$

Образец решения задачи №18

Исследуем на устойчивость систему

$$\dot{x} = 2x + y$$

$$\dot{y} = 3x + 4y$$

Найдём корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Отсюда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Корни вещественные, различные и положительные. Точка покоя – неустойчивый узел.