

Общие указания

Предлагаемая работа содержит контрольные задания по программе первого и второго курсов высшей математики (линейная алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика) для студентов «Заочного факультета» всех специальностей. В пособии приведен образец решения одного варианта.

Выполнение студентами контрольных заданий является одним из этапов изучения учебной дисциплины и подготовки к экзамену. Каждое контрольное задание выполняется в отдельной тетради и предъявляется преподавателю для защиты.

К экзамену допускаются лишь те студенты, у которых зачтены все контрольные задания, запланированные в данном семестре.

Каждый студент выполняет контрольные задания в соответствии со своим вариантом(*номер варианта определяется последней цифрой номера студенческого билета или зачетной книжки*).

**Программа по курсу «Высшая математика»
для студентов I курса заочной формы обучения**

Лекции – 18 часов.

Практические занятия –18 часов.

Контрольная работа.

Всего часов 36.

№ п/п	Тема занятия	Кол. часо в
Лекции		
1.	Определители 2,3-го порядка и их свойства. Способы вычисления определителей. Правило Крамера. Метод Гаусса. Обратная матрица. Матричный метод решения систем квадратных линейных алгебраических уравнений.	2
2.	Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное и смешанное произведение векторов, свойства. Прямая линия на плоскости и ее уравнения. Уравнения плоскости и прямой в пространстве.	2
3.	Предел функции и его геометрический смысл. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций. Непрерывность элементарных функций. Свойства непрерывных на отрезке функций.	2
4.	Производная функции в точке. Правила нахождения производной суммы, разности, произведения и отношения функций. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной функции; функции, заданной параметрически; неявной функции. Первый дифференциал.	2
5.	Критерий монотонности дифференцируемых функций. Необходимое и достаточное условие экстремума. Критические точки первого рода. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Определение выпуклости и вогнутости, точек перегиба. Общая схема исследования функций и построения графиков.	2
6.	Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой. Интегрирование рациональных	2

№ п/п	Тема занятия	Кол. часо в
	дробей с помощью разложение на простейшие дроби. Интегрирование тригонометрических функций.	
7.	Определение и основные свойства определенного интеграла. Производная по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов и площадей поверхностей вращения. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Основные свойства.	2
8.	Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных. Экстремумы функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.	2
9.	Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: интегральный признак Коши-Маклорена; признаки сравнения («эталонные» ряды); радикальный признак Коши; признак Даламбера. Знакопередающие ряды: признак Лейбница.	2
Практические занятия		
1.	Определители 2,3-го порядка и их свойства. Способы вычисления определителей. Решение СЛУ (по лекции №1).	2
2.	Векторы (скалярное, векторное, смешанное произведения). Элементы аналитической геометрии (по лекции №2).	2
3.	Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций. Непрерывность элементарных функций. Свойства непрерывных на отрезке функций (по лекции №3).	2
4.	Нахождение производных. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной функции; функции, заданной параметрически; неявной функции. Первый дифференциал (по лекции №4).	2
5.	Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Определение выпуклости и вогнутости, точек	2

№ п/п	Тема занятия	Кол. часо в
	перегиба. Общая схема исследования функций и построения графиков (по лекции №5).	
6.	Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложение на простейшие дроби. Интегрирование тригонометрических функций (по лекции №6).	2
7.	Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенных интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов и площадей поверхностей вращения. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (по лекции №7).	2
8.	Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных. Экстремумы функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент (по лекции №8).	2
9.	Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: интегральный признак Коши-Маклорена; признаки сравнения («эталонные» ряды); радикальный признак Коши; признак Даламбера. Знакопередающиеся ряды: признак Лейбница (по лекции №9).	2

Рекомендуемая литература

1. В.С. Щипачев. Высшая математика (учебник). М.: Высшая школа 1998.
2. В.С. Щипачев. Задачник по высшей математике. М.: Высшая школа 2000.
3. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1 и 2. М.: Наука. 1970-1978.
4. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука. 1974.
5. Н.В. Ефимов. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука. 1965-1975.
6. В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. Краткий курс высшей математики. М.: Наука. 1986.

Вариант №1

Задача №1

Точки $A(1;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;1;1)$ и $D(0;-1;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = -3 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Задача №3

Составить уравнение гиперболы в канонической системе координат, если в ней расстояние между вершинами -10 , а расстояние между фокусами 12 .

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 2^{\sin \sqrt{x}}$; б) $y = \log_2 \arcsin x$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = 2x + 2y + 1$$

при условии

$$x^2 + 4xy + 5y^2 = 1.$$

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/2} (x+2) \cos 2x dx; \text{ в) } \int_2^3 \frac{5x dx}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = 2x \text{ и } y = 3x^2 - x.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{1}{3}x^{3/2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}.$$

Вариант №2

Задача №1

Точки $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(0;2;1)$ и $D(0;0;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} x + y - 4z = \lambda - 3 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ -2x + 2y + 4z = 6 \end{cases}.$$

Задача №3

Составить уравнение гиперболы в канонической системе координат, если эксцентриситет гиперболы равен $7/5$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 2x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2\pi x}{\sin 5\pi x}$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 2^{\cos \sqrt[3]{x^2-1}}$; б) $y = \arcsin(\log_3 x)$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$; б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 2x^2 + 3xy + 3y^2 - 2x + 3y.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = 2x + y + 1$$

при условии

$$x^2 + 4xy + 2y^2 - 2 = 0.$$

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/2} x \sin 3x dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{2x dx}{(x+1)(x^2+2x+5)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = x^2/2 \text{ и } y = 2 - (3/2)x.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = 2x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2n-1}}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2} (x-1)^n.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x}{x^2 + x - 2}.$$

Вариант №3

Задача №1

Точки $A(2;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;1;1)$ и $D(1;-1;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = -3 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

Задача №3

Составить уравнение гиперболы в канонической системе координат, если уравнения директрис $x = \pm\sqrt{5/6}$, а точка $(-9;4)$ принадлежит гиперболе.

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 3}{(2/3)x^2 + 5x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2 2\pi x}{\sin^2 5\pi x}$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 2^{\arcsin \sqrt{x}}$; б) $y = \log_2 \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$; б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-3)^2}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 5x^2 + 4xy + y^2 - x + 7y + 1.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x + 3y + 2$$

при условии

$$3x^2 + 8xy + 6y^2 - 18 = 0.$$

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx; \text{ б) } \int_{\pi/2}^{\pi} (x-1) \cos 3x dx; \text{ в) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x+2)(x^2-2x+2)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = 2x - x^2 \text{ и } y = x.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{2x - x^2} - 1, 1/4 \leq x \leq 1.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3 + 3n^2 + 1}}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{4n^2 + 1}}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x-5}{x^2 - x - 2}.$$

Вариант №4

Задача №1

Точки $A(1;0;2)$, $B(-1;1;1)$, $C(0;1;2)$ и $D(0;-1;2)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 4x - 2y - 10z = -6 \\ -2x + 3y + 3z = \lambda + 3 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Задача №3

Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если расстояние между вершинами на большой полуоси равно 16, а расстояние между фокусами равно 10.

Задача №4

Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3x + 3}{2x^2 + 9x - 7}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cos 2\pi x - 1)(1 + \cos 2\pi x)}{\sin^2 5\pi x}.$$

Задача №5

Найти производные следующих функций

$$\text{а) } y = 3^{\arctg(2x-1)}; \text{ б) } y = \cos(\log_3 \sqrt{x}).$$

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

$$\text{а) } y = \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2}; \text{ б) } y = \sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}.$$

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y - 3.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = 2x + 2y - 1$$

при условии

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - 8 = 0.$$

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx; \text{ б) } \int_0^\pi (x+1)\sin 2x dx; \text{ в) } \int_{-1}^0 \frac{(x+3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = -x^2 \text{ и } y = x^2 - 2x - 4.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}, \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{5n+1}(n+2)}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x+2)^n.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x+5}{x^2+5x-6}.$$

Вариант №5

Задача №1

Точки $A(0;0;1)$, $B(-2;1;0)$, $C(-1;1;1)$ и $D(-1;-1;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 2x - 2y - 4z = -\lambda \\ -x + y + 2z = 3 \\ 3x - y - 8z = -3 \end{cases}.$$

Задача №3

Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если фокусы эллипса $(\pm 2; 0)$, а уравнения директрис $x = \pm 18$.

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 4x + 5}{2x^2 - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{\sin^2 5\pi x}$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 3^{\arccos(5x^2+2)}$; б) $y = \sin(\log_4 \sqrt{x+1})$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x-2)^3}{x^2}$; б) $y = \sqrt{(x+1)(x-1)^2}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 4x^2 - 6xy + 3y^2 - x + 5y - 2.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x + y + 10$$

при условии

$$3x^2 + 6xy + 4y^2 - 3 = 0.$$

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{4-x}{\sqrt{x^2+3x+13/4}} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/2} (2x+1) \sin 4x dx; \text{ в) } \int_1^2 \frac{(2-x)dx}{x(x^2+3x+13/4)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = \frac{6}{x+5} \text{ и } y = |x|, \quad x \geq -2.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = -x^{2/3} - 1, \quad 0 \leq x \leq 5\sqrt{5}.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{2n^2+4n-3}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n+1}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}.$$

Вариант №6

Задача №1

Точки $A(1;-1;1)$, $B(-1;0;0)$, $C(0;0;1)$ и $D(0;-2;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Задача №3

Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины на оси OY 8.

Задача №4

Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 5}{x^2 + 8}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 2\pi x}{1 - \cos 5\pi x}.$$

Задача №5

Найти производные следующих функций

$$\text{а) } y = 4^{\frac{\sin \sqrt{x}}{1+x}}; \text{ б) } y = \operatorname{tg}(\ln x^2).$$

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

$$\text{а) } y = \frac{x^3}{(x+2)^2}; \text{ б) } y = \sqrt{(x+1)(x-2)^2}.$$

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + x - 2y.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x + 2y - 5$$

при условии $2x^2 + 2xy + y^2 - 5 = 0$.

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{3-2x}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx; \text{ б) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(2x+1) dx; \text{ в) } \int_3^4 \frac{(3x-2)dx}{(x-2)(x^2-4x+5)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ и } y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{16}{27} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 2}{n^4 + 4}$.

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{\sqrt{n^2 + 2n + 2}}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}.$$

Вариант №7

Задача №1

Точки $A(1;0;0)$, $B(-1;1;-1)$, $C(0;1;0)$ и $D(0;-1;0)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 6 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Задача №3

Составить уравнение параболы в канонической системе координат, если расстояние от фокуса до директрисы равно 12.

Задача №4

Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 7x^2 + 2}{x^2 + 2x + 2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 2\pi x - 1}{1 - \cos 5\pi x}.$$

Задача №5

Найти производные следующих функций

$$\text{а) } y = 4^{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+1}}; \text{ б) } y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x+1}.$$

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

$$\text{а) } y = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}; \text{ б) } y = \sqrt{x^2(x+2)}.$$

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 6y + 1.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = 3x + 2y - 5$$

при условии $3x^2 + 2xy + y^2 - 18 = 0$.

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx; \text{ б) } \int_{-\pi/2}^0 (x+2) \cos(2x-1) dx; \text{ в) } \int_{-1}^0 \frac{(6x+5)dx}{(x-1)(x^2+4x+8)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = x - \pi/2, \quad y = \cos x \quad \text{и} \quad x = 0.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{4}{5}x^{5/4}, \quad 0 \leq x \leq 9.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}}{2n^2-1}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4n-2}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x-3}{x^2+2x-3}.$$

Вариант №8

Задача №1

Точки $A(2;1;2)$, $B(0;2;1)$, $C(1;2;2)$ и $D(1;0;2)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = -3 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ -2x - y + z = 3 - \lambda \end{cases}.$$

Задача №3

Составить уравнение параболы в канонической системе координат, если длина хорды, проходящей через фокус под углом 45° к оси параболы, равна 18.

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3x - 8x^2}{x^2 - 5x + 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} 2\pi x}{\sin 5\pi x}$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 2^{\operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{x+1}}}$; б) $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 2} \right)$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$; б) $y = \sqrt{(x+1)(x-6)^2}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x + 8y.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x + 3y - 2$$

при условии $2x^2 + 6xy + 5y^2 - 5 = 0$.

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/2} (2x-1) \cos 4x dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{(5-6x)dx}{(x+1)(x^2+4x+5)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = 6x - x^2 - 7, \quad y = x - 3.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{x}{6} \sqrt{x+12}, \quad -11 \leq x \leq -3.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{2n^2 - n + 1}}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Вариант №9

Задача №1

Точки $A(0;-1;0)$, $B(-2;0;-1)$, $C(-1;0;0)$ и $D(-1;-2;0)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} x + y - 4z = \lambda - 3 \\ -x + 2y + z = \lambda \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}.$$

Задача №3

Составить уравнение параболы в канонической системе координат, если парабола проходит через точку $(5;-5)$.

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 9x^2}{x^2 - 2x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{ctg} 2\pi x \cdot \sin 5\pi x$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 2^{\arcsin \frac{1}{x}}$; б) $y = \frac{\sin x^2}{\cos x} \ln x$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$; б) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 4x^2 - 8xy + 3y^2 + 5x - 6y.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = 2x - y + 3$$

при условии $5x^2 + 4xy + y^2 - 17 = 0$.

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{6x+5}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi/2} (x-2) \sin 7x dx; \text{ в) } \int_1^2 \frac{(3x+5)dx}{x(x^2-4x+8)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = \sqrt{x}, y = x - 2 \text{ и } x = 0.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3+2}}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}}.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x-1}{x^2+3x+2}.$$

Вариант №10

Задача №1

Точки $A(2;1;1)$, $B(0;2;0)$, $C(1;2;1)$ и $D(1;0;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 3x - 2y - 7z = -6 \\ -x + y + 2z = 3 \\ -x + 2y + z = \lambda \end{cases}.$$

Задача №3

Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если фокусами эллипса являются точки $(\pm 1; 0)$, а точка $(\sqrt{3}; \sqrt{3}/2)$ принадлежит эллипсу.

Задача №4

Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 6x + 1}{5 - 2x + x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \cos 2\pi x) \cdot \operatorname{ctg}^2 5\pi x$.

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 2^{\arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$; б) $y = \operatorname{arctg}(\ln \sqrt{x})$.

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$; б) $y = \sqrt{(x-3)(x-5)^2}$.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$F(x, y) = 2x^2 + 8xy + 7y^2 - 2x - 3y + 1.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = -2x + 3y + 5$$

при условии $x^2 + 2xy + 2y^2 - 29 = 0$.

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{8x+2}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx; \text{ б) } \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin(3x-1) dx; \text{ в) } \int_0^1 \frac{(3-2x)dx}{(x+1)(x^2+6x+10)}.$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = 1 - x^2, \quad y = 2x.$$

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = 4\sqrt{x-2}, \quad 2 \leq x \leq 3.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{n^2+3}.$$

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{(n+1)(n^2+1)}} (x-1)^n.$$

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x=0$, функцию

$$y = \frac{x-1}{x^2+4x+3}.$$

Решение примерного варианта

Задача №1

Точки $A(1; 2; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(2; 1; 1)$ и $D(2; -1; 1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

2. Найти:

- объём тетраэдра;
- длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
- расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
- уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Решение

Найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2; -1; 1\}, \overrightarrow{AC} = \{1; -1; 0\}, \overrightarrow{AD} = \{1; -3; 0\}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

следовательно, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Объём тетраэдра:

$$V_{\tau} = \frac{1}{6} V_{\pi} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-2| = \frac{1}{3}.$$

Площадь основания тетраэдра $ABCD$:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}| = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Длина искомой высоты } h = \frac{V_{\tau}}{S} = \frac{1 \cdot 2}{3\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{33}.$$

Расстояние d между скрещивающимися рёбрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \{3; 0; -1\}, \overrightarrow{AD} = \{1; -3; 0\}.$$

Точка A принадлежит прямой AD , B – прямой BC . Тогда:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD}|} = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \bigg/ \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{91}}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + 3z - 6 = 0.$$

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = \lambda \\ -x - 3y + 2z = 5 \end{cases}.$$

Решение

Из расширенной матрицы системы, после указанных элементарных преобразований строк получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & \lambda \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(2)+(3)}]{\substack{(1)+2\cdot(3)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & 12 \\ 0 & -7 & 5 & \lambda+5 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-7 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

По критерию Кронекера-Капелли система имеет решение только, если $\lambda = 7$. Таким образом, если $\lambda \neq 7$ – система несовместна, если $\lambda = 7$ система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} -7y + 5z = 12 \\ -x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (5z - 12)/7 \\ x = \frac{1-z}{7}, \quad z \in R \end{cases}.$$

Система имеет бесконечное число решений вида:

$$x = \frac{1}{7} - \frac{z}{7}, \quad y = \frac{5}{7}z - \frac{12}{7}, \quad z \in R.$$

Задача №3

Составить уравнение гиперболы в канонической системе координат, если в ней длина вещественной оси равна 1, а точка (1;3) принадлежит гиперболе.

Решение

Уравнение гиперболы в канонической системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из условия имеем, во-первых, $\frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$, а во-вторых $2a = 1$.

Отсюда $a = \frac{1}{2}$, $b^2 = \frac{9}{1/a^2 - 1} = 3$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Задача №4

Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{3 - 5x + 8x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} 3\pi x}{\sin \pi x}$.

Решение

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{3 - 5x + 8x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} + 8} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} + 8 \right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$.

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} 3\pi x}{\sin \pi x}$, сделаем замену переменной $x = t + 2$. Очевидно,

$x \rightarrow 2$ равносильно $t \rightarrow 0$. Кроме того,

$$\operatorname{tg} 3\pi x = \operatorname{tg} 3\pi(t + 2) = \operatorname{tg}(3\pi t + 6\pi) = \operatorname{tg} 3\pi t \text{ и}$$

$$\sin \pi x = \sin \pi(t + 2) = \sin(\pi t + 2\pi) = \sin \pi t.$$

Но известно, что $\sin \pi t \sim \pi t$, $\operatorname{tg} 3\pi t \sim 3\pi t$, $t \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} 3\pi x}{\sin \pi x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3\pi t}{\sin \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\pi t}{\pi t} = 3.$$

Задача №5

Найти производные следующих функций

а) $y = 3^{\arcsin \frac{1}{x}}$; б) $y = \lg \sin(2x^2 + 1)$.

Решение

а) $\ln y = \ln 3^{\arcsin \frac{1}{x}} = \arcsin \frac{1}{x} \cdot \ln 3$, это тождественное равенство

в области определения функции $y(x)$. Поэтому, дифференцируя

обе части равенства, с учётом, что y – функция переменной x имеем

$$\frac{1}{y} y' = \frac{\ln 3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x} \right)'; \quad y' = y \frac{\ln 3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -3^{\arcsin \frac{1}{x}} \frac{\ln 3}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\ln \sin(2x^2 + 1) \right)' = \frac{1}{\sin(2x^2 + 1)} \left(\sin(2x^2 + 1) \right)' = \\ &= \frac{\cos(2x^2 + 1)}{\sin(2x^2 + 1)} (2x^2 + 1)' = 4x \operatorname{ctg}(2x^2 + 1). \end{aligned}$$

Задача №6

Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

$$\text{а) } y = \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)}.$$

Решение

$$\text{а) } y = \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2}, \quad y' = \frac{(x-4)^2}{(x+1)^3} (x+11), \quad y'' = \frac{150(x-4)}{(x+1)^4}.$$

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 4; x = -11$. При этом знак производной в левой окрестности точки $x = -11$ положительный, а в окрестности правой – отрицательный. Следовательно, $x = -11$ – точка локального максимума и $y(-11) = -\frac{135}{4}$. В точке $x = 4$ экстремума нет.

Промежуток возрастания: $(-\infty; -11) \cup (-1; +\infty)$, т.к. $y'(x) > 0$.

Промежуток убывания: $(-11; -1)$, т.к. $y'(x) < 0$.

3. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 4$. При этом $y'' < 0$ при $x < 4$ и $y'' > 0$, если $x > 4$. Следовательно, $x = 4$ – точка перегиба графика функции. На промежутке $(-\infty; -1) \cup (-1; 4)$ – функция выпукла вверх.

На промежутке $(4; +\infty)$ – функция выпукла вниз.

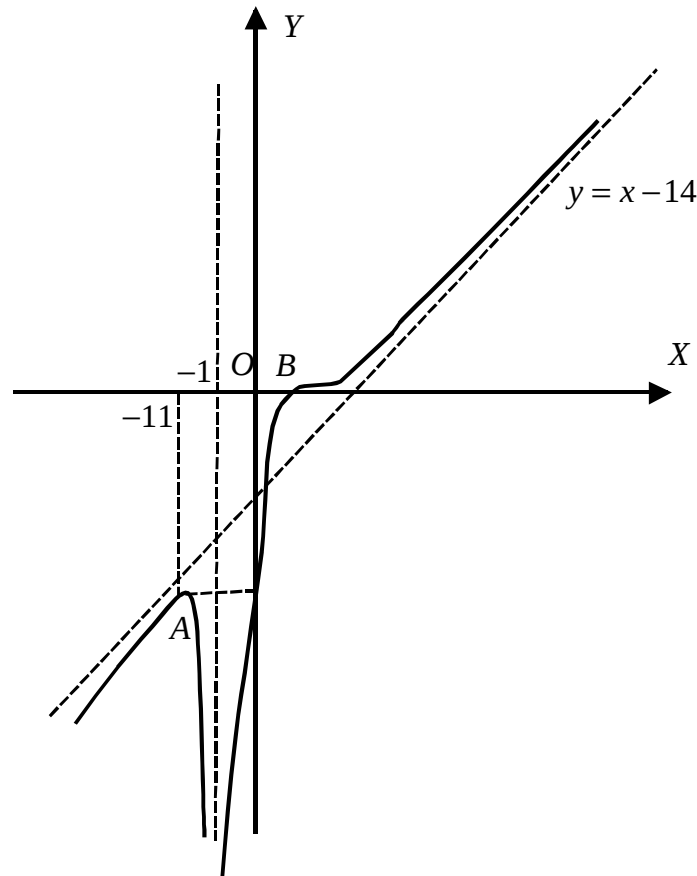
4. Асимптоты

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2} = -\infty \Rightarrow x = -1 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

$$y(x) = \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}{x^2 + 2x + 1} = x - 14 + \frac{75x - 50}{x^2 + 2x + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - (x - 14)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{75x - 50}{x^2 + 2x + 1} = 0,$$

$y(x) = x - 14$ – наклонная асимптота при $x \rightarrow \infty$. График функции изображен на рисунке 1.



$A(-11; -135/4)$ – локальный максимум

$B(4; 0)$ – точка перегиба

Рисунок 1

б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2} = (x-1)^{1/3}(x-4)^{2/3}.$

1. Область определения $x \in (-\infty; +\infty).$

2. $y' = \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-4)}}, y'' = \frac{-2}{\sqrt[3]{(x-1)^5(x-4)^4}},$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2; y' = \infty \Leftrightarrow x = 4$. В точке $x = 1$ y' не существует, точка $A(2; \sqrt[3]{4})$ – локальный максимум; точка $B(4; 0)$ – локальный минимум.

Промежуток возрастания: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$, т.к. $y'(x) > 0$.

Промежуток убывания: $(2;4)$, т.к. $y'(x) < 0$.

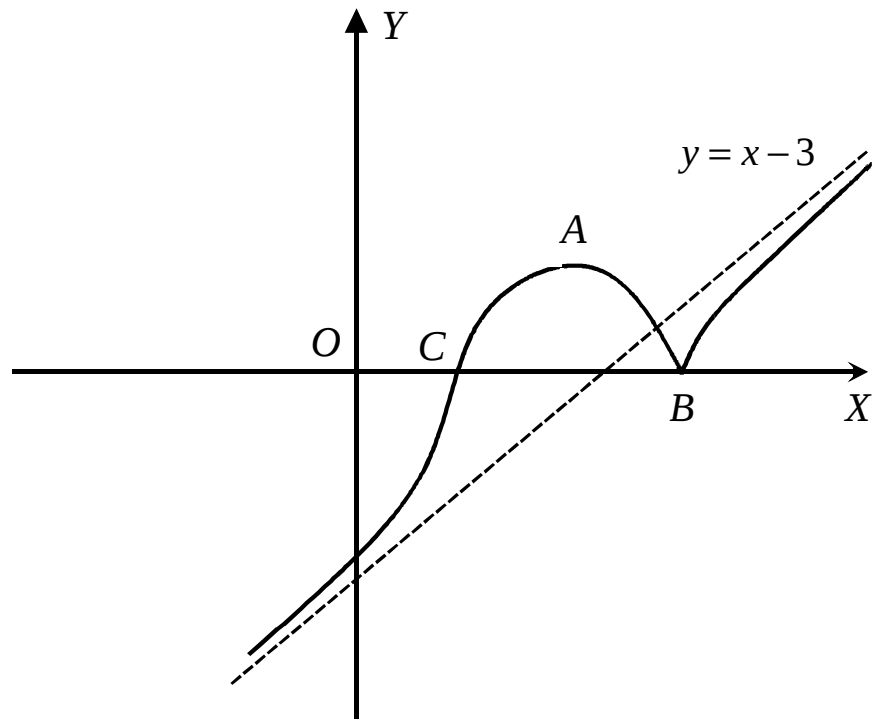


Рисунок 2

3. $y'' \neq 0$, $y'' > 0$, если $x > 1$ и $y'' < 0$, если $x < 1$.

Точка $C(1;0)$ – точка перегиба с вертикальной касательной к графику функции в этой точке.

На промежутке $(-\infty;1)$ – функция выпукла вниз, на промежутке $(1;+\infty)$ – функция выпукла вверх.

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{4}{x}\right)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3} - 1 \right)}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right)} + 1} = \frac{-9}{3} = -3. \end{aligned}$$

$y = x - 3$ – наклонная асимптота. График функции изображен на рисунке 2.

Задача №7

Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$u(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x + 6y.$$

Решение

Найдём стационарные точки функции $u(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ -x + 4y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1.$$

Проверим выполнение достаточных условий:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2; -1) = 2; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $d^2u(2; -1)$. По критерию

Сильвестра получаем $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta = 2 \cdot 4 - 1 = 7 > 0$ в точке $(2; -1)$ достигается строгий локальный минимум:

$$u(2; -1) = 4 + 2 + 2 - 10 - 6 = -8.$$

Задача №8

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x + 5y$$

при условии

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = \frac{1}{4}.$$

Решение

Построим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x + 5y + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 1/4).$$

Найдём стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x + 2\lambda y + 1 = 0 \\ 2\lambda x + 6\lambda y + 5 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1/\lambda \\ x = 1/2\lambda \\ \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{2}{2\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^2} = \frac{1}{4} \end{cases}, \lambda^2 = 9, \lambda = \pm 3.$$

Стационарные точки: $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 3\right)$ и $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -3\right)$. Проверим

выполнение достаточных условий существования экстремума в стационарных точках.

$$L''_{xx} = 2\lambda; L''_{yy} = 6\lambda; L''_{xy} = 2\lambda,$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 4\lambda dx dy + 6\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + 2dx dy + 3dy^2).$$

Кроме того, дифференцируя уравнение связи, имеем:

$$2x dx + 2y dx + 2x dy + 6y dy = 0, \text{ отсюда } dy = -\frac{x+y}{x+3y} dx.$$

С учётом этой связи между dy и dx получим

$$d^2L = 2\lambda \left(1 - \frac{2(x+y)}{(x+3y)} + \frac{3(x+y)^2}{(x+3y)^2} \right) dx^2,$$

в точке $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 3\right)$ $d^2L = 6 \left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \right) dx^2 = \frac{96}{25} dx^2 > 0,$

следовательно в точке $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\right)$ достигается условный минимум.

В точке $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -3\right)$ $d^2L = -6 \left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \right) dx^2 = -\frac{96}{25} dx^2 < 0,$ в точке $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$ достигается условный максимум.

Задача №9

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

а) $\int_0^1 \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx$; б) $\int_2^\pi (x-2) \sin 3x dx$; в) $\int_1^2 \frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} dx.$

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx &= \int_0^1 \frac{d(x^2+6x+10)}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} = \\ &= 2\sqrt{x^2+6x+10} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+1}} = 2(\sqrt{17}-\sqrt{10}) - \\ &- \ln \left(x + \sqrt{x^2+6x+10} \right) \Big|_0^1 = 2(\sqrt{17}-\sqrt{10}) - \ln \frac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_2^\pi (x-2) \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} \int_2^\pi (x-2) d(\cos 3x) = -\frac{1}{3} (x-2) \cdot \cos 3x \Big|_2^\pi + \\ &+ \frac{1}{3} \int_2^\pi \cos 3x dx = -\frac{1}{3} (\pi-2) \cos 3\pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_2^\pi = \frac{\pi-2}{3} - \frac{1}{9} \sin 6. \end{aligned}$$

в) $\int_1^2 \frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} dx$. Разложим рациональную функцию

$\frac{x-2}{x(x^2+6x+10)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+10} = \frac{(A+B)x^2 + (6A+C)x + 10A}{x(x^2+6x+10)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства, имеем:

$$\begin{cases} A+B=0 & B=1/5 \\ 6A+C=1 \Rightarrow C=1+6/5=11/5. \\ 10A=-2 & A=-1/5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} dx &= -\frac{1}{5} \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{5} \int_1^2 \frac{x+11}{(x^2+6x+10)} dx = -\frac{1}{5} \ln|x| \Big|_1^2 + \\ &+ \frac{1}{10} \int_1^2 \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + \frac{16}{10} \int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x+10} = -\frac{\ln 2}{5} + \frac{1}{10} \ln(x^2+6x+10) \Big|_1^2 + \\ &+ \frac{8}{5} \int_1^2 \frac{dx}{(x+3)^2+1} = -\frac{\ln 2}{5} + \frac{1}{10} \ln \frac{26}{17} + \frac{8}{5} \operatorname{arctg}(x+3) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{10} \ln \frac{13}{34} + \frac{8}{5} (\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 4). \end{aligned}$$

Задача №10

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = \sqrt{x-1}, \quad y = x-3 \quad \text{и} \quad x=1.$$

Решение

Найдём точку пересечения графиков функций $y = \sqrt{x-1}$ и $y = x-3$ (рисунок 3). Из равенства $\sqrt{x-1} = x-3$ имеем

$x_0 = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$. Тогда площадь фигуры равна:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 (\sqrt{x-1} - (x-3)) dx = \int_1^5 \sqrt{x-1} dx - \int_1^5 (x-3) d(x-3) = \\ &= \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^5 - \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_1^5 = \frac{16}{3} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

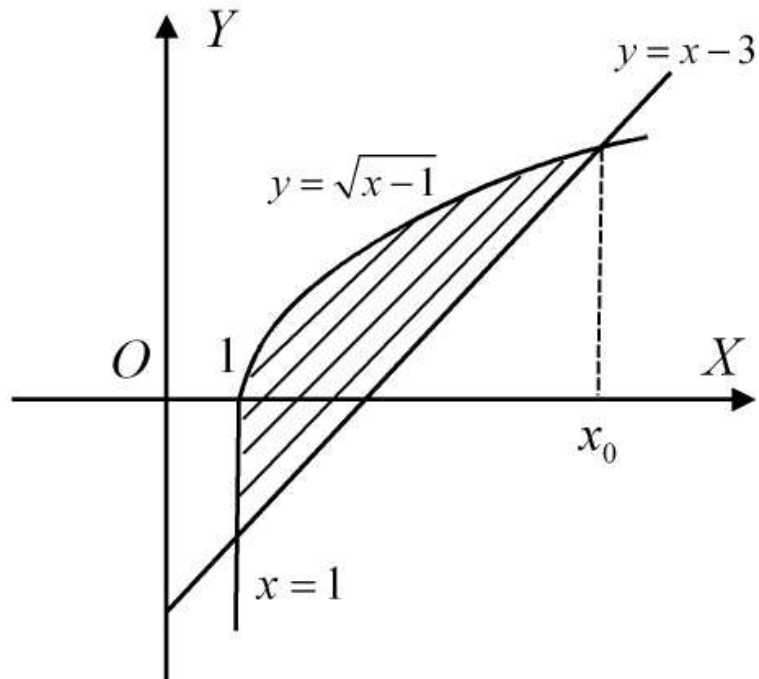


Рисунок 3

Задача №11

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{3}{2} \left(x^{1/3} - \frac{1}{5} x^{5/3} \right), \quad 1 \leq x \leq 8.$$

Решение

Длина дуги кривой в декартовой системе координат вычисляется по формуле:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

$$y' = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} x^{2/3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{2/3} \right),$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{2/3} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x^{2/3} + \frac{1}{x^{2/3}} \right)^2,$$

$$L = \frac{1}{2} \int_1^8 (x^{2/3} + x^{-2/3}) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} x^{5/3} + 3x^{1/3} \right) \Big|_1^8 = \frac{54}{5}.$$

Задача №12

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}}{n+1}.$$

Решение

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})}{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})} = \\ &= \frac{2n+3-2n+1}{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})} = \frac{4}{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})} > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Пусть $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1})}{4n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ – сходится, то по признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Задача №13

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3n}} (x+2)^n.$$

Решение

Зафиксируем x_0 и рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3n}} (x_0 + 2)^n. \text{ По признаку Даламбера ряд абсолютно}$$

сходится, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+2)(n^2 + 3n)}{((n+1)^2 + 3(n+1))(n+1)}} = 1,$$

то, если $|x_0 + 2| < 1$, т.е. $x \in (-3; -1)$, то ряд сходится абсолютно.

С другой стороны, если $|x_0 + 2| > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x_0 + 2| > 1,$$

следовательно, ряд расходится, если $x \notin [-3, -1]$. Исследуем случай,

когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, т.е. $x_0 = -3$ или $x_0 = -1$.

Рассмотрим ряд при $x_0 = -3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}},$$

сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} : \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 3n}{n^2 + n}} = 1,$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится, то расходится и рассматриваемый ряд.

При $x_0 = -1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}} \text{ – знакопеременный ряд.}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}} = 0$ и стремление к нулю монотонное, это следует из того, что

$$\left(\frac{x+1}{x^2 + 3x} \right)' = -\frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 3x)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

то по признаку Лейбница ряд сходится.

Окончательно, область сходимости исходного ряда – полуинтервал $(-3; -1]$.

Задача №14

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, функцию

$$y = \frac{x+8}{x^2 - 5x - 6}.$$

Решение

Представим рациональное выражение, задающее функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x+8}{x^2-5x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-6} = \frac{(A+B)x-6A+B}{x^2-5x-6},$$

$$x+8 = (A+B)x-6A+B \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases},$$

$$y = \frac{2}{x-6} - \frac{1}{x+1} = \frac{-2}{6(1-x/6)} - \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6}\right)^{-1} - (1+x)^{-1}.$$

Воспользовавшись стандартным разложением функции

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \text{ где } C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad |x| < 1.$$

Получаем:

$$y = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{1}{3 \cdot 6^n} + (-1)^n\right) x^n, \quad |x| < 1.$$