

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И АНАЛИЗА ДАННЫХ

ИМ. ПРОФЕССОРА И.А. СОЛОВЬЕВА

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 2 -го курса
заочной формы обучения направления подготовки
21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

Москва 2026

ББК 22.1
УДК 517

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой математики,
физики и анализа данных им. профессора И.А. Соловьева
Государственного университета по землеустройству
(протокол №1 от 27.01.2026)

Авторы:

к. ф.-м. н., доцент Кузнецова Н.А.
к. п. н., доцент Курочкина К.В.

Рецензент

Заведующий кафедрой математики, физики
и анализа данных имени проф. И.А. Соловьева
к. ф.-м. н., доцент Левченко К.Г.

К 89 Математика. Практическое руководство к выполнению
контрольных работ: учебное пособие / Н.А. Кузнецова, К.В.
Курочкина. – М.: ГУЗ, 2026. – 90с.

Настоящее учебное пособие разработано в соответствии с программой и тематическими планами по математике с целью оказания помощи студентам второго курса заочной формы обучения в выполнении контрольных работ. Пособие включает теоретический материал, в объеме необходимом для освоения методов решения практических задач и выполнения контрольной работы. Контрольная работа содержит индивидуальные задания по всем разделам курса, а также подробные решения аналогичных заданий.

© Государственный университет по землеустройству, 2026
© Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., 2026

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов второго курса заочной формы обучения направления подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры». Целью пособия является оказание помощи студентам в изучении и закреплении теоретического материала, и в выполнении контрольной работы. Контрольная работа содержит пятнадцать заданий по основным темам программы. Пособие включает элементы теоретического материала согласно заявленным в контрольной работе темам в рамках программы. В пособии детально рассмотрены все задания контрольной работы с указанием методов, приемов, алгоритмов, формул, теорем, необходимых при решении задач, с детальным объяснением как их применить при выполнении конкретного задания. На каждый тип задания приведено несколько примеров с подробными решениями с целью охватить все возможные случаи и варианты задания. Номер варианта контрольной работы определяется по последней цифре в номере зачетки. Цифра нуль означает десятый вариант.

Глава 1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Основные определения.

Определение. *Комплексным числом (КЧ)* z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – любые действительные числа, i – мнимая единица, определяемая как $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

Определение. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается символом $a = \operatorname{Re} z$. Число b называется *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается символом $b = \operatorname{Im} z$.

Например, $z = 2 - i6$, $z = 11 + i3$, $z = -0,1 + i\sqrt{2}$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ **равны** тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$ лишь при $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Любое действительное число может быть представлено как мнимое с нулевой мнимой частью: $a = a + i \cdot 0$. Например, $2 = 2 + i \cdot 0 = z$.

Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел (a, b) , то естественной *геометрической интерпретацией* является изображение комплексного числа $z = a + ib$ точкой $Z(a, b)$ или $M(a, b)$ плоскости Oxy с декартовыми координатами $x = a$, $y = b$. Такую плоскость в дальнейшем будем называть *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной осью* ($Re\ z$), а ось ординат – *мнимой осью* ($Im\ z$) комплексной плоскости (см. рис. 1).

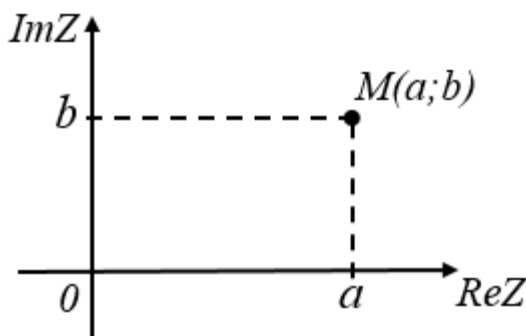


Рис. 1

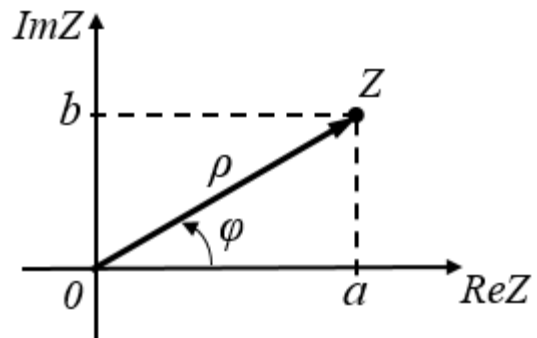


Рис. 2

Для определения положения точки на плоскости можно использовать *полярные координаты* (ρ, φ) , где ρ – расстояние от точки Z до начала координат, φ – угол, который радиус-вектор данной точки составляет с положительным направлением оси абсцисс (см. рис. 2). Длина вектора $\overrightarrow{OZ}$ называется *модулем комплексного числа*, обозначается символом $\rho = |z|$ и вычисляется по формуле

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Угол φ , образованный вектором $\overrightarrow{OZ}$ с положительным направлением оси Ox , называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки. Аргумент комплексного числа определяется через его действительную и

мнимую части с помощью формул (см. рис. 2):

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Эти формулы позволяют выразить действительную и мнимую части комплексного числа через полярные координаты:

$$a = \rho \cos \varphi; \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Значение аргумента КЧ можно определить из формул:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg b/a, & \text{если } a > 0; \\ \pi + \arctg b/a, & \text{если } a < 0, \quad b \geq 0; \\ -\pi + \arctg b/a, & \text{если } a < 0, \quad b < 0; \\ \pi/2, & \text{если } a = 0, \quad b > 0; \\ -\pi/2, & \text{если } a = 0, \quad b < 0. \end{cases}$$

Два отличных от нуля комплексных числа **равны** между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на число, кратное 2π .

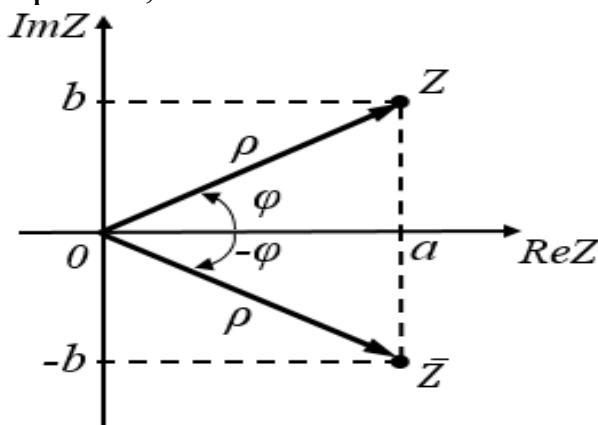


Рис. 3

Определение. Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ называется **комплексно-сопряжённым** к комплексному числу $z = a + ib$.

Комплексное число $z = a + ib$ и комплексно-сопряженное к нему $\bar{z} = a - ib$ имеют один и тот же модуль. Действительно, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho$, $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \rho$.

Значения аргументов **комплексно-сопряжённых** чисел различаются знаком (рис. 3).

1.2. Формы записи комплексного числа

Определение. Запись комплексного числа в виде $z = a + ib$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Подставив в алгебраическую форму выражения

$$a = \rho \cos \varphi \quad \text{и} \quad b = \rho \sin \varphi,$$

получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа

$$z = a + ib = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Используя известную формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, перейдем от тригонометрической формы к *показательной форме* записи комплексного числа

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Таким образом, любое комплексное число может быть представлено в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи

$$z = a + ib = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Пример 1. Записать комплексное число $z = 2 + i \cdot 2$ в тригонометрической форме.

Решение. Изобразим число на комплексной плоскости (см. рис. 4). Вычислим полярные координаты:

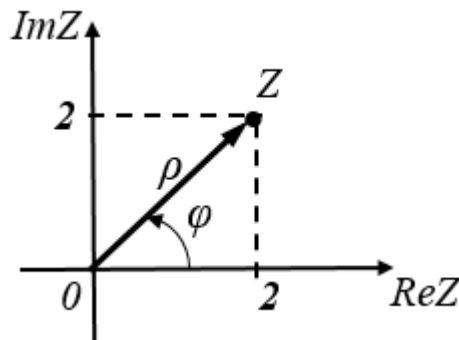


Рис. 4

$$a = 2, \quad b = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{2}{2} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2},$$

$$a = \rho \cos \varphi = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}, \quad b = \rho \cdot \sin \varphi = 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4},$$

$$z = a + ib = 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + i 2\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Ответ. $z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$

Пример 2. Записать комплексное число $z = -8$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Изобразим КЧ на комплексной плоскости (см. рис. 5) и запишем его в виде $z = -8 + i \cdot 0$. Действительная часть, мнимая часть, модуль и тангенс аргумента соответственно равны

$$a = \operatorname{Re} z = -8, \quad b = \operatorname{Im} z = 0,$$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{0}{-8} = 0.$$

Так как число z находится в левой полуплоскости, то угол $\varphi = \pi$. Тригонометрическая и показательная формы записи этого числа имеют вид

$$z = a + ib = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = 8 (\cos \pi + i \sin \pi) = 8e^{i\pi}.$$

Ответ. $z = -8 = 8 (\cos \pi + i \sin \pi) = 8e^{i\pi}.$

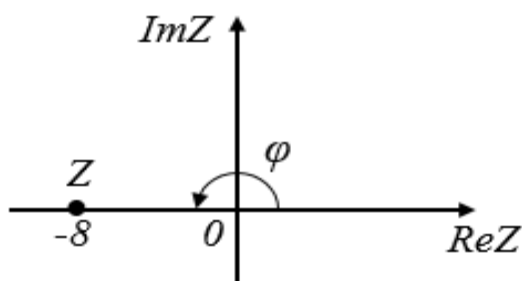


Рис. 5

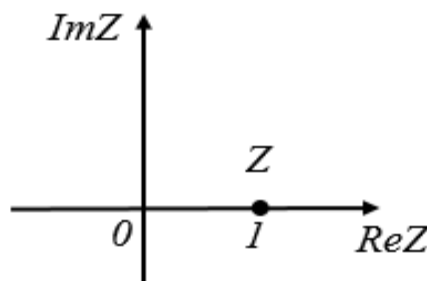


Рис. 6

Пример 3. Записать комплексное число $z = 1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Изобразим комплексное число на комплексной плоскости (см. рис. 6) и запишем его в виде $z = 1 = 1 + i \cdot 0$.

Вычислим $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ и $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{0}{1} = 0$. Следовательно,

$$z = 1 = 1 + i \cdot 0 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1 \cdot e^{i \cdot 0}.$$

Ответ. $z = 1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = e^{i \cdot 0}$.

Пример 4. Представить комплексное число $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ в алгебраической форме.

Решение. Из условия имеем $\rho = |z| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
Действительная и мнимая части данного КЧ соответственно равны

$$\operatorname{Re} z = a = \rho \cos \varphi = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{Im} z = b = \rho \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Алгебраическая форма записи данного комплексного числа имеет вид $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Изобразим КЧ на комплексной плоскости (см. рис. 7).

Ответ. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

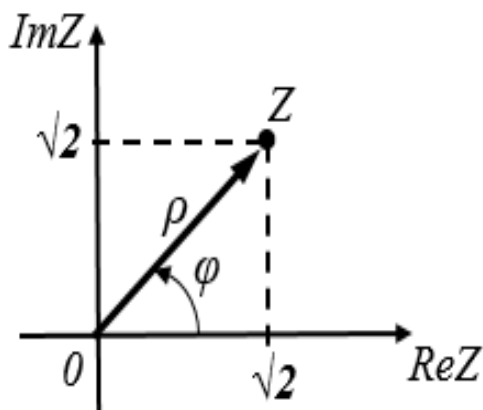


Рис. 7

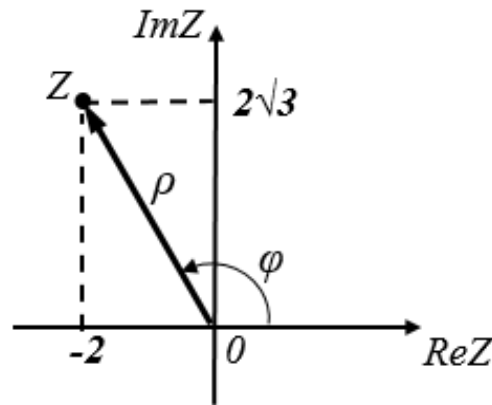


Рис. 8

Пример 5. Записать КЧ $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Изобразим число на комплексной плоскости (рис. 8). Так как $\operatorname{Re} = -2 < 0$ и $\operatorname{Im} = 2\sqrt{3} > 0$, то модуль и аргумент соответственно равны:

$$\rho = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{2}{3}\pi.$$

Ответ. $z = 4 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}.$

Пример 6. Записать в тригонометрической и в показательной формах комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Изобразим число на комплексной плоскости (рис. 9). Найдём модуль и главное значение аргумента данного числа. Так как $\operatorname{Re} = -1 < 0$ и $\operatorname{Im} = -\sqrt{3} < 0$, то КЧ находится в III четверти и, поэтому, модуль и аргумент соответственно равны:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2;$$

$$\varphi = \arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = -\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, тригонометрическая и показательная формы записи данного комплексного числа примут вид

$$z = -1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \right) = 2e^{\frac{-2\pi}{3}i}.$$

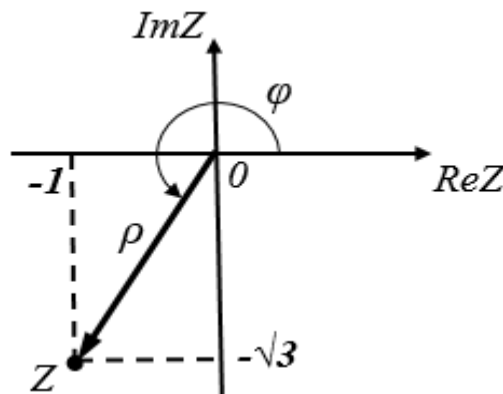


Рис. 9

Ответ. $z = -1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \right) = 2e^{\frac{-2\pi}{3}i}.$

1.3. Действия над комплексными числами

1.3.1. Сумма, произведение и частное комплексных чисел

Определение. Комплексное число $z = a + ib$ называется *суммой* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, если $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.

Действительно,

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Определение. Комплексное число $z = a + ib$ называется *разностью* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$, если $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$.

Действительно,

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Пример 1. Найти сумму и разность комплексных чисел $z_1 = 2 + i3$ и $z_2 = -6 + i5$.

Решение. $z_3 = z_1 + z_2 = 2 + i3 + (-6 + i5) = -4 + 8i$,

$$z_4 = z_1 - z_2 = 2 + i3 - (-6 + i5) = 8 - 2i.$$

Ответ. $z_3 = -4 + 8i$, $z_4 = 8 - 2i$.

Замечание. Результатом сложения двух *комплексно-сопряжённых* чисел всегда является действительное число, результатом их вычитания – чисто мнимое.

Действительно,

$$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a,$$

$$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = i2b.$$

Определение. *Произведением* комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z = a + ib$ такое, что $a = a_1a_2 - b_1b_2$, $b = a_1b_2 + b_1a_2$.

Действительно, перемножая два комплексных числа, с учётом правила возведения в степень мнимой единицы i , получим

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + a_1ib_2 + ib_1ib_2 = \\ = a_1a_2 + i^2b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2).$$

Пример 3. Найти произведение чисел $z_1 = 2 + i3$ и $z_2 = -6 + i5$.

Решение. $z = z_1 \cdot z_2 = (2 + i3) \cdot (-6 + i5) =$
 $= 2(-6) + i3(-6) + 2i5 + i3i5 =$
 $= -12 - 18i + 10i + i^215 = -12 - 8i - 15 = -27 - 8i.$

Ответ. $z = -27 - 8i.$

Замечание. Операция умножения проводится по правилам умножения многочленов с учётом правила возведения в степень мнимой единицы. Например,

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \\ i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -(-1) = 1, \\ i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^5 \cdot i = -1, \quad i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i \text{ и т. д.}$$

Замечание. Результатом умножения двух комплексно-сопряжённых чисел всегда является действительное число

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = aa + iba - aib - ibib = \\ = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

Определение. *Частным* двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называется комплексное число $z = a + ib$ такое, что

$$a = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Чтобы выполнить *деление* комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 , умножим числитель и знаменатель дроби на комплексно-сопряжённое к знаменателю число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a^2 + b^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Пример 4. Найти частное чисел $z_1 = 2 + i3$ и $z_2 = -6 + i5$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i3}{-6 + i5} = \frac{(2 + i3) \cdot (-6 - i5)}{(-6 + i5) \cdot (-6 - i5)} = \\ &= \frac{2(-6) + i3(-6) + 2(-i5) + i3(-i5)}{(-6)^2 + (-5)^2} = \\ &= \frac{-12 - 18i - 10i - 15i^2}{36 + 25} = \frac{-12 - 28i + 15}{61} = \frac{3 - 28i}{61} = \frac{3}{61} - \frac{28}{61}i. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } z = \frac{3}{61} - \frac{28}{61}i.$$

Замечание. При умножении или делении комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, при $\rho \neq 0$, иногда удобно перейти к тригонометрической, а затем к показательной формам записи КЧ:

$$\begin{aligned} 1) \quad z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = \\ &= \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \\ 2) \quad z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \\ &= \frac{\rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

1.3.2. Возведение комплексного числа в n -ю степень

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа удобны при возведения комплексного числа в целую положительную степень и извлечения корня из комплексного числа.

Представим комплексное число в виде

$$\begin{aligned} z = a + ib &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = |z|, \\ e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Возведем комплексное число в натуральную степень n

$$\begin{aligned} z^n &= (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = (\rho \cdot e^{i\varphi})^n = \rho^n (e^{i\varphi})^n = \\ &= \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Из полученных соотношений следует **формула Муавра** (английский математик, 1667–1754)

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Пример 1. Вычислить комплексное число z^{12} , если $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Решение. Вычислим модуль и аргумент комплексного числа:

$$\rho = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Возведем в степень КЧ, используя формулу Муавра

$$\begin{aligned} z^{12} &= (3 + i\sqrt{3})^{12} = (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{12} = \rho^{12} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{12} = \\ &= \rho^{12} (\cos 12\varphi + i \sin 12\varphi) = (\sqrt{12})^{12} \left(\cos \left(12 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= (12)^6 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 12^6 \cdot (1 + i \cdot 0) = 12^6. \end{aligned}$$

Ответ. $z^{12} = 12^6$.

Пример 2. Вычислить комплексное число $(-1 + i)^{100}$.

Решение. Число $z = -1 + i$ представим в тригонометрической форме. Для этого вычислим

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и

$$\begin{aligned}
z^{100} &= (\sqrt{2})^{100} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^{100} = \\
&= \sqrt{2}^{100} \left(\cos \left(100 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(100 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \\
&= 2^{50} (\cos 75\pi + i \sin 75\pi) = 2^{50} (\cos(74\pi + \pi) + i \sin(74\pi + \pi)) = \\
&= 2^{50} (\cos \pi + i \sin \pi) = 2^{50} (-1 + i \cdot 0) = -2^{50}.
\end{aligned}$$

Ответ. $(-1 + i)^{100} = -2^{50}$.

1.3.3. Извлечение корня из комплексного числа

Определение. *Корнем n -й степени* из комплексного числа z называется такое комплексное число ω , n -я степень которого равна z , т.е. $\omega^n = z$.

Корень n -й степени из комплексного числа z обозначается символом $\sqrt[n]{z}$ и на множестве комплексных чисел имеет ровно n значений.

Если комплексное число z задано в тригонометрической форме $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то все значения корня n -й степени вычисляются по **обобщенной формуле Муавра**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Геометрически все значения корня лежат на окружности радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и образуют правильный n -угольник.

Пример 1. Найти все значения корней $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Изобразим комплексное число $z = -1$ на комплексной плоскости (см. рис. 10). Запишем данное КЧ число в тригонометрической форме. Вычислим его модуль и аргумент:

$$z = -1 = -1 + i \cdot 0 \quad |z| = |-1| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1;$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{arctg} \frac{0}{-1} = \operatorname{arctg} 0 = \pi.$$

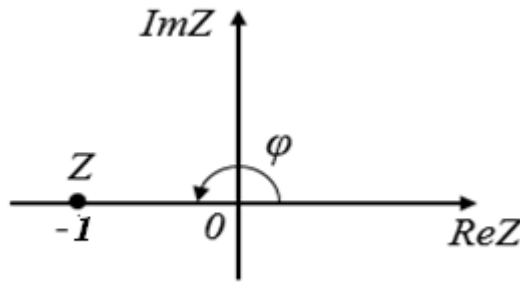


Рис. 10

Комплексное число z находится в левой полуплоскости, поэтому $\varphi = \pi$. Следуя общей формуле

$$\sqrt[n]{z} = \omega^k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

в нашем случае получим

$$\sqrt[4]{-1} = \omega^k = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Вычислим все значения корня $\sqrt[4]{-1}$:

$$k = 0, \quad \omega_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 1, \quad \omega_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 2, \quad \omega_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 3, \quad \omega_3 = \cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значения корня лежат на окружности радиуса $R = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{1} = 1$ и образуют правильный четырехугольник, т.е. квадрат (см. рис. 11).

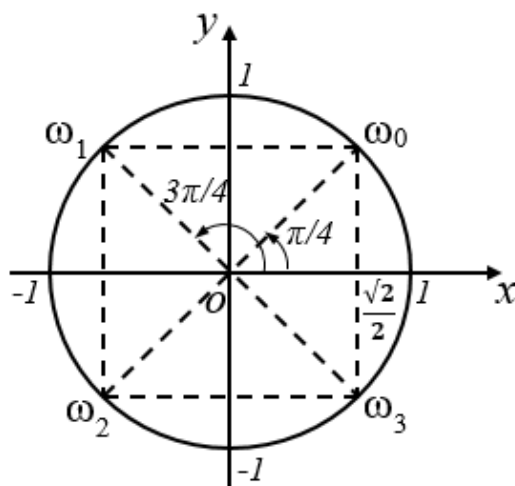


Рис. 11

Ответ.

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \omega_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Для комплексных чисел $z_1 = 2 + i3$ и $z_2 = 3 - i2$ вычислить сумму, разность, произведение и частное.

Ответ. $z = z_1 + z_2 = 5 + i$; $z = z_1 - z_2 = -1 + 5i$;

$$z = z_1 \cdot z_2 = 12 + 5i; \quad z = \frac{z_1}{z_2} = i..$$

Задание 2. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа: 1) $z = i$; 2) $z = 12 + 5i$.

Ответ. 1) $z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

$$2) z = 12 + 5i = 13 \left(\cos \left(\arctg \frac{5}{12} \right) + i \sin \left(\arctg \frac{5}{12} \right) \right) = 13e^{i \cdot \arctg \frac{5}{12}}.$$

Задание 3. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = i^{12}$.

Ответ. $z = i^{12} = (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = e^{i6\pi}$.

Задание 4. Найти все значения корней комплексных чисел:

$$1) z = \sqrt[3]{-1}; \quad 2) z = \sqrt[3]{1}; \quad 3) z = \sqrt[3]{i}; \quad 4) z = \sqrt{1+i}.$$

Ответ.

$$\begin{aligned} &1) -1, \quad \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) -i, \quad \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}; \\ &4) \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) \right), \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Глава 2. Дифференциальные уравнения

2.1. Основные определения

Определение. Уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$, называется **дифференциальным уравнением n -го порядка**.

Определение. **Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например, уравнение $y' - 2xy^2 + 5 = 0$ является дифференциальным уравнением 1-го порядка, а уравнение $y'' + y = \sin x$ является дифференциальным уравнением 2-го порядка.

В процессе нахождения решения дифференциального уравнения используется операция интегрирования. Истинность решений устанавливается проверкой.

Определение. **Решением** или **интегралом** дифференциального уравнения n -го порядка называется любая функция $y = y(x)$, если она n раз дифференцируема на некотором промежутке и которая, будучи подставленной в уравнение вместе со своими производными, превращает его в тождество на этом промежутке.

Определение. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется **интегрированием** дифференциального уравнения.

Определение. **Общим решением** или **общим интегралом** дифференциального уравнения называется множество всех без исключения его решений $y = y(x; C)$, $C \in R$.

Определение. *Частным решением* дифференциального уравнения называется решение $y = y(x; C_0)$, где C_0 – известное число.

Пример 1. Проверить, что решением дифференциального уравнения 1-го порядка $y'x - x^2 - y = 0$ являются функции:

- 1) $y = x^2$, $y = x^2 + x$, $y = x^2 + 2x$, частные решения;
- 2) $y = x^2 + Cx$, где $C \in R$, общее решение, т.е. множество функций, являющихся решением данного уравнения.

Решение. 1) Найдём производные частных решений, а затем частные решения и их производные подставим в данное уравнение:

$$1.1) \quad y = x^2, \quad y' = 2x, \quad y'x - x^2 - y = 2x \cdot x - x^2 - x^2 = 0;$$

$$1.2) \quad y = x^2 + x, \quad y' = 2x + 1, \\ y'x - x^2 - y = (2x + 1) \cdot x - x^2 - (x^2 + x) = 0.$$

$$1.3) \quad y = x^2 + 2x, \quad y' = 2x + 2, \\ y'x - x^2 - y = (2x + 2) \cdot x - x^2 - (x^2 + 2x) = 0.$$

2) Найдём производную общего решения, а затем её и само общее решение подставим в исходное уравнение:

$$y' = (x^2 + Cx)' = 2x + C,$$

$$(2x + C)x - x^2 - (x^2 + Cx) = 2x^2 + Cx - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Вычисления показали, что все функции удовлетворяют данному уравнению, т.е. являются решениями этого уравнения. Поэтому в общем случае решение имеет вид

$$y = x^2 + Cx, \quad \text{где } C \in R.$$

Ответ. $y = x^2 + Cx$, где $C \in R$, общее решение.

Пример 2. Доказать, что решением дифференциального уравнения 2-го порядка $y'' + y = 0$ являются функции

$$y = \sin x, \quad y = 2 \cos x, \quad y = 3 \cos x - \sin x.$$

Найти общее решение уравнения.

Решение. 1) Найдём производные частных решений, а затем

частные решения и их производные подставим в данное уравнение:

$$1.1) \quad y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x, \\ y'' + y = -\sin x + \sin x = 0;$$

$$1.2) \quad y = 2 \cos x, \quad y' = -2 \sin x, \\ y'' = (y')' = (-2 \sin x)' = -2 \cos x, \\ y'' + y = 2 \cos x - 2 \cos x = 0;$$

$$1.3) \quad y = 3 \cos x - \sin x, \\ y' = (3 \cos x - \sin x)' = -3 \sin x - \cos x, \\ y'' = (-3 \sin x - \cos x)' = -3 \cos x - (-\sin x) = -3 \cos x + \sin x, \\ y'' + y = -3 \cos x + \sin x + 3 \cos x - \sin x = 0.$$

2) Анализируя структуру частных решений, можно предположить, что в общем виде решение будет иметь вид

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \text{ где } C_1, C_2 \in R.$$

Проверка. Чтобы убедиться в правильности предположения сделаем проверку. Найдем производные первого и второго порядков предполагаемого общего решения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

$$y' = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

$$y'' = (y')' = (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x.$$

Подставим общее решение и его производные в исходное уравнение

$$y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0.$$

Вычисления показали, что функция $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, где $C_1, C_2 \in R$, удовлетворяет данному уравнению, т.е. является общим решением уравнения.

Ответ. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1, C_2 \in R$, – общее решение.

2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка могут быть записаны в общем виде $F(x, y, y') = 0$ или, если удастся выразить производную, в явном виде $y' = f(x, y)$.

Множество решений дифференциального уравнения 1-го порядка обозначим $y = y(x; C)$, $C \in R$. Графиком кривой $y = y(x; C)$, $C \in R$, является семейство **интегральных кривых**, которое представляет собой множество линий, покрывающее всю **область определения** функции $y = y(x; C)$, $C \in R$, (см. рис.12 и рис 13).

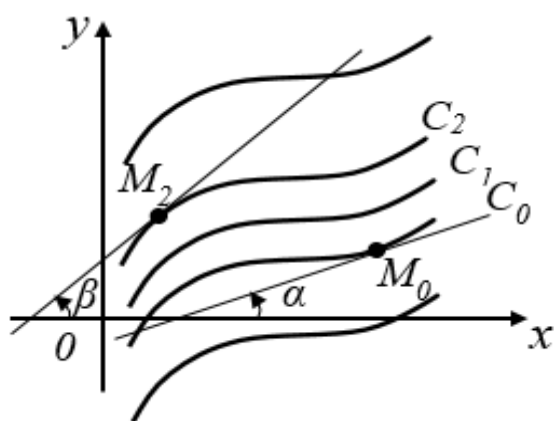


Рис. 12

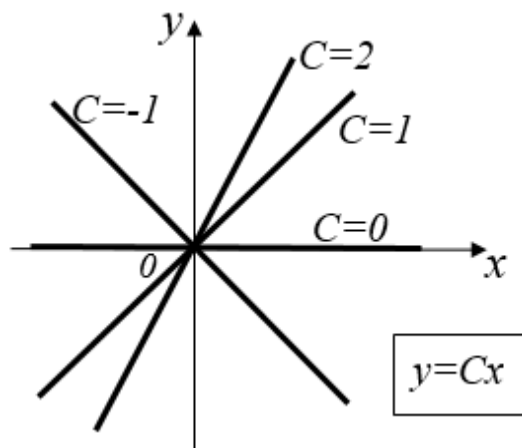


Рис. 13

2.2.1 Задача Коши

Для выделения одной конкретной кривой из множества интегральных кривых $y = y(x; C)$, $C \in R$, надо задать одну точку $M_0(x_0; y_0)$ через которую проходит данная интегральная кривая, т.е. выделить **частное решение** $y = y(x; C_0)$, которому соответствует определенное значение константы $C = C_0 \in R$.

Аналитически эта проблема выражается в виде **задачи Коши**:

Найти решение $y = y(x; C_0)$ дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условию

$y_0 = y(x_0)$, т.е. по заданным значениям $x = x_0$, $y_0 = y(x_0)$ определить значение константы C_0 . Таким образом, решение задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

сводится к решению системы
$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y_0 = y(x_0; C) \end{cases}.$$

Решением системы является значение константы C_0 , а **решением задачи Коши** для дифференциального уравнения 1-го порядка является функция $y = y(x; C_0)$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Проверить являются ли указанные функции общим решением дифференциальных уравнений:

1) $y = Cx$, $y'x - y = 0$; 2) $y = \sin x + C$, $y' - y = 0$;

3) $y = \sqrt{x^2 + C}$, $y'y - x = 0$; 4) $y = Cx^2$, $y'x - 3y = 0$;

Ответы. 1) Данная функция является решением уравнения.

2) Данная функция не является решением уравнения.

3) Данная функция является решением уравнения.

4) Данная функция не является решением уравнения.

Задание 2. Проверить являются ли указанные функции частным решением дифференциальных уравнений:

1) $y = x^2 + 1$, $y'x - y = 0$; 2) $y = e^{-2}e^{\sqrt{x}}$, $2y'\sqrt{x} = y$.

Ответы. 1) Данная функция не является частным решением уравнения. 2) Данная функция является частным решением уравнения.

2.2.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с **разделяющимися переменными**, если оно имеет один из видов

$$f(x)g(y)dx + \varphi(x)p(y)dy = 0 \quad \text{или} \quad y' = q(x)h(y),$$

где $f(x)$, $\varphi(x)$ – непрерывные функции только переменной x , $g(y)$, $p(y)$ – непрерывные функции только переменной y .

Идея метода решения основана на возможности разделения уравнения на две части, содержащую только переменную x и содержащую только переменную y , и размещения их по разные стороны равенства.

Алгоритм решения (первый) дифференциального уравнения вида

$$f(x)g(y)dx + \varphi(x)p(y)dy = 0.$$

Преобразуем уравнение и разделим левую и правую части уравнения на произведение функций $g(y) \cdot \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)g(y)dx &= -\varphi(x)p(y)dy \quad | : g(y)\varphi(x) \\ \frac{f(x)g(y)}{g(y)\varphi(x)}dx &= -\frac{\varphi(x)p(y)}{g(y)\varphi(x)}dy \\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx &= -\frac{p(y)}{g(y)}dy \quad \Rightarrow \quad \frac{p(y)}{g(y)}dy = -\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx. \end{aligned}$$

В полученном уравнении переменные разделены и его можно интегрировать, левую часть по переменной y и правую по переменной x :

$$\int \frac{p(y)}{g(y)}dy = -\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx \quad \Rightarrow \quad F(y) = G(x) + C, \quad C \in R,$$

$F(y)$, $G(x)$ – первообразные подынтегральных выражений левой и правой частей равенства.

Алгоритм решения (второй) дифференциального уравнения вида

$$y' = q(x) \cdot h(y).$$

При замене $y' = \frac{dy}{dx}$, уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dx} = q(x)h(y) \quad | \cdot dx \quad \Rightarrow \quad dy = q(x)h(y)dx.$$

Разделим уравнение на функцию $h(y)$:

$$dy = q(x)h(y)dx \mid : h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = \frac{q(x)h(y)dx}{h(y)}$$

$$\frac{dy}{h(y)} = q(x)dx.$$

В полученном уравнении, переменные разделены и его можно интегрировать, левую часть по переменной y и правую по переменной x

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int q(x)dx \Rightarrow H(y) = Q(x) + C, \quad C \in R,$$

где $H(y)$, $Q(x)$ – первообразные подынтегральных выражений левой и правой частей равенства.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y = y'$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому для его решения применим описанный выше *второй* алгоритм. Так как

$$y = y' \text{ и } y' = \frac{dy}{dx}, \text{ то } y = \frac{dy}{dx}, \quad ydx = dy, \quad \frac{ydx}{y} = \frac{dy}{y}, \quad dx = \frac{dy}{y}.$$

Полученное равенство, является интегрируемым

$$\int dx = \int \frac{dy}{y}, \quad x + A = \ln|y|, \quad A \in R, \quad |y| = e^{x+A} = e^x e^A.$$

$$y = Ce^x, \quad C = \pm e^A \in R.$$

Проверка.

$$y' = (Ce^x)' = C(e^x)' = Ce^x \Rightarrow y = y' \Rightarrow Ce^x = Ce^x \Rightarrow 1 = 1.$$

А это значит, что функция $y = Ce^x$, $C \in R$, удовлетворяет данному уравнению, т.е. является общим решением уравнения.

На рисунке 15 изображено множество интегральных кривых данного уравнения.

Ответ. $y = Ce^x$, $C \in R$.

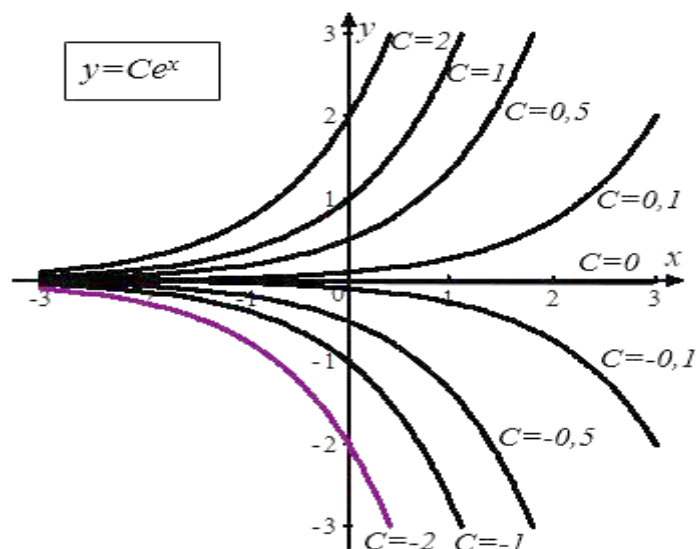


Рис. 15

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$(1+x^2)dy = (1+y^2)dx.$$

Решение. Данное уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому для его решения применим описанный выше *первый* алгоритм. Разделим переменные:

$$(1+x^2)dy = (1+y^2)dx \quad | : (1+x^2)(1+y^2),$$

$$\frac{(1+x^2)dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(1+y^2)dx}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

После сокращения, получается равенство, удобное для интегрирования,

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\arctgy = \arctgx + C, \quad C \in R.$$

Ответ. $\arctgy = \arctgx + C, \quad C \in R.$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $yy' + x = 0$ и найти частное решение по начальному условию $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$.

Решение. 1) Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому для разделения переменных применим описанный выше *второй* алгоритм:

$$yy' + x = 0, \quad y \frac{dy}{dx} + x = 0, \quad ydy = -x dx,$$

$$\int ydy = -\int xdx, \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C, \quad C \in R, \quad y^2 = -x^2 + 2C,$$

$$y^2 + x^2 = C^2, \quad C \in R.$$

Графиком общего решения данного ДУ является множество концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = C$ (см. рисунок 16).

2) Используя начальное условие $y_0 = 4$ при $x_0 = -2$, т.е. $y(-2) = 4$ и общее решение, найдем константу C

$$4^2 + (-2)^2 = C^2 \quad C^2 = 16 + 4 = 20 \quad y^2 + x^2 = 20.$$

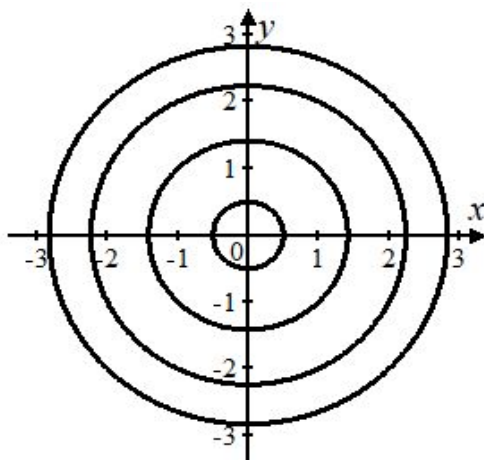


Рис. 16

Ответ. 1) $y^2 + x^2 = C^2, C \in R$, – общее решение,

2) $y^2 + x^2 = 20$ – частное решение.

Задания для самостоятельного решения

Задание № 1. Решить ДУ с разделяющимися переменными:

1. $(1 + y^2)dx + yx dy = 0;$

2. $xydx + (x + 1)dy = 0;$

$$3. yy' + x = 1;$$

$$4. (1 + e^x)y' = ye^x;$$

$$5. 6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx;$$

$$6. x^3y' + y^2 = 0.$$

Ответы:

$$1. x^2(1 + y^2) = C;$$

$$2. y = C(x + 1)e^{-x};$$

$$3. y^2 + (x - 1)^2 = C^2;$$

$$4. y = C(1 + e^x);$$

$$5. (3 + y^2)^3 = C(2 + x^2)^2;$$

$$6. y = \frac{-2x^2}{1 + 2Cx^2}.$$

Задание 2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$1. xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5; \quad 2. y \cdot \ln y dx + x dy = 0, \quad y(1) = e.$$

Ответы: 1. $y = (x + 1)^{-1}$; 2. $y = e^{1/x}$.

2.3. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальные уравнения второго порядка записываются в общем виде $F(x, y, y', y'') = 0$ или, если удастся выразить производную, в явном виде $y'' = f(x; y; y')$. Множество решений дифференциального уравнения 2-го порядка обозначается как $y = y(x; C_1; C_2)$, $C_1, C_2 \in R$. Графиком кривой $y = y(x; C_1; C_2)$ является семейство **интегральных кривых**, которое представляет собой множество кривых, покрывающее всю область определения функции $y = y(x; C_1; C_2)$.

2.3.1 Задача Коши

Найти решение $y = y(x; C_1; C_2)$ дифференциального уравнения 2-го порядка $F(x, y, y', y'') = 0$, удовлетворяющее условиям $y_0 = y(x_0; C_1; C_2)$, $y'_0 = y'(x_0; C_1; C_2)$, т.е. по заданным значениям $x = x_0$, $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$ определить значение констант C_1 и C_2 . Таким образом, решение задачи Коши для

дифференциального уравнения 2-го порядка сводится к решению системы

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'') = 0 \\ y_0 = y(x_0; C_1; C_2) \\ y_0' = y'(x_0; C_1; C_2) \end{cases}.$$

Решением системы является значение констант $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, а решением задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка является функция $y = y(x; C_1^0; C_2^0)$.

2.3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – вещественные числа, называется **линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами**.

Решением ЛОДУ есть линейная комбинация двух независимых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, каждая из которых является решением этого уравнения. Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **фундаментальной системой** решений ЛОДУ.

Общее решение ЛОДУ имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Метод решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ заключается в составлении **характеристического уравнения**

$$k^2 + pk + q = 0.$$

и исследования его корней. Характеристическое уравнение является квадратным и его корни вычисляются согласно

формулам $k_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ и $k_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

1) В случае $k_1 \neq k_2$, $k_1 \in R$, $k_2 \in R$, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

2) В случае $k_1 = k_2 = k$, $k \in R$, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + x C_2 e^{kx} = e^{kx} (C_1 + x C_2), \quad C_1, C_2 \in R.$$

3) В случае мнимых корней характеристического уравнения

$$k_1 = a + ib, \quad k_2 = a - ib, \quad i = \sqrt{-1}, \quad a \in R, \quad b \in R,$$

общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^2 + 5k + 4 = 0,$$
$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -4 \\ k_2 = -1 \end{cases}.$$

Так как $k_1 \neq k_2$, то решением уравнения будет функция

$$y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Ответ. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in R.$

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ и найдем его корни

$$k_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$$

Так как $k_1 = k_2 = k = 1$, то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1 e^x + x C_2 e^x = e^x (C_1 + x C_2), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Ответ. $y = C_1 e^x + x C_2 e^x = e^x (C_1 + x C_2), \quad C_1, C_2 \in R.$

Пример 3. Решить уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 8 = 0$ и найдем его корни

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm i.$$

Так как $a = -2$ $b = 1$, то общим решением уравнения будет функция

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx = \\ &= C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in R. \end{aligned}$$

Ответ. $y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in R.$

Пример 4. Решить задачу Коши $y(0) = y'(0) = 1$ для уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0.$

Решение. В предыдущем примере получено общее решение данного уравнения

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Поиск частного решения задачи Коши предполагает решение системы, полученной из начальных условий $y(0) = 1$ и $y'(0) = 1$.

Вычислим производную общего решения

$$\begin{aligned} y' &= \left(e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \right)' = \\ &= -2e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) = \\ &= e^{-2x} (-2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x - C_1 \sin x + C_2 \cos x) = \\ &= e^{-2x} ((-2C_1 + C_2) \cos x - (2C_2 + C_1) \sin x). \end{aligned}$$

Составим и решим систему

$$\begin{cases} y(0) = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \Big|_{x=0} = 1 \\ y'(0) = e^{-2x} ((-2C_1 + C_2) \cos x - (2C_2 + C_1) \sin x) \Big|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 1 \\ e^0 ((-2C_1 + C_2) \cos 0 - (2C_2 + C_1) \sin 0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) = 1 \\ ((-2C_1 + C_2) \cdot 1 - (2C_2 + C_1) \cdot 0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 3 \end{cases}.$$

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$y_K = e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x).$$

Проверка. Вычислим первую и вторую производные частного решения

$$y' = -2e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x) + e^{-2x} (-\sin x + 3 \cos x) =$$

$$= e^{-2x} (\cos x - 7 \sin x)$$

$$y'' = -2e^{-2x} (\cos x - 7 \sin x) + e^{-2x} (-\sin x - 7 \cos x) =$$

$$= e^{-2x} (-9 \cos x + 13 \sin x).$$

Подставим функции y , y' , y'' в исходное ДУ

$$5y + 4y' + y'' = 5e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x) +$$

$$+ 4e^{-2x} (\cos x - 7 \sin x) + e^{-2x} (-9 \cos x + 13 \sin x) = 0.$$

Ответ. $y_K = e^{-2x} (\cos x + 3 \sin x).$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решить однородные ДУ второго порядка:

1. $y'' + 2y' + y = 0;$

2. $y'' + y' = 0;$

3. $y'' + y - 2y = 0;$

4. $y'' + 2y' + 5y = 0;$

Ответы: 1. $y = e^{-x} (C_1 + C_2 x);$ 2. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$

3. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x};$ 4. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$

Задание 2. Решить задачу Коши

1. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 8;$

2. $y'' + 6y' + 10 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

Ответы: 1. $y = 4e^x + e^{4x};$ 2. $y = e^{-3x} (\cos x + 2 \sin x).$

Глава 3. Кратные интегралы

3.1. Двойной интеграл и его применение

Двойной интеграл вычисляется от функции двух переменных $f(x, y)$ по области $D = \{(x, y)\}$ и записывается в виде

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Основные свойства двойного интеграла

1. Интеграл суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy.$$

2. Константу можно выносить за знак интеграла

$$\iint_D C f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy, \quad C \in R.$$

3. Если область интегрирования D разбита на две области $(D = D_1 \cup D_2)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Оценка двойного интеграла

Если выполняется неравенство $m \leq f(x, y) \leq M$, где числа m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области D , то

$$m S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M S,$$

где S – площадь области D .

Приложения двойного интеграла

1. Двойной интеграл $S = \iint_D dx dy$ равен *площади областей*:

1) $D = \{(x, y): a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, (рис. 17);

2) $D = \{(x, y): x_1(y) \leq x \leq x_2(y); c \leq y \leq d\}$, (рис. 18).

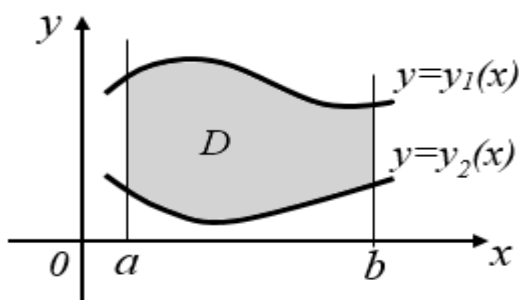


Рис.17

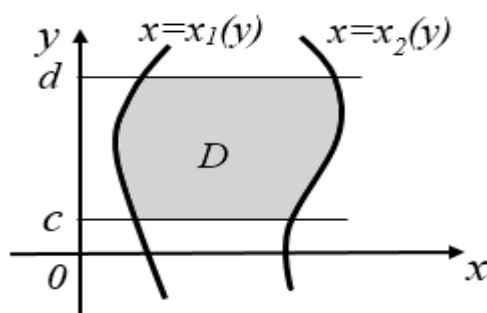


Рис.18

В случае полностью криволинейной области (рис. 19), границы изменения переменных устанавливаются в зависимости от вида функций.

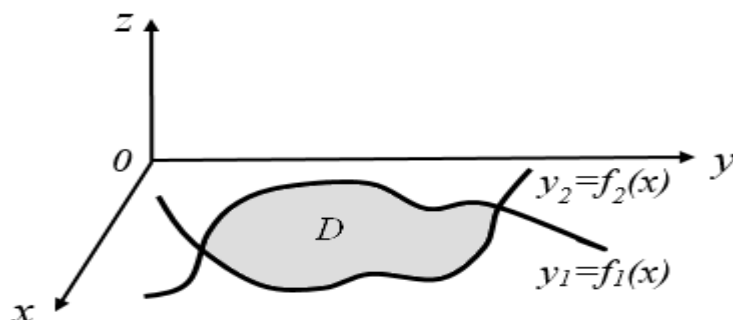


Рис. 19

2. Двойной интеграл $V = \iint_D f(x,y) dx dy$ равен **объему криволинейного цилиндра**, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y) > 0$, снизу — плоскостью $z = 0$, с боковых сторон — цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz , а направляющей служит контур области D (рис. 20).

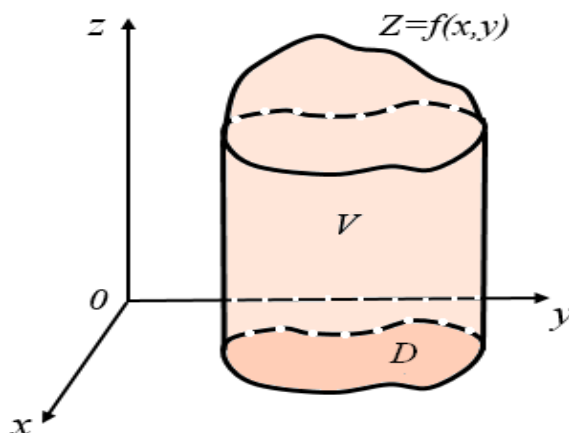


Рис. 20

3.2. Двойной интеграл по прямоугольной области

В случае **прямоугольной** области $D = \{(x, y): a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ двойной интеграл вычисляется по формулам:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx; \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул, называются **повторными** или **двукратными** интегралами. При этом второй интеграл в повторных интегралах называется **внутренним**.

Например, в первой формуле интеграл $\int_a^b f(x, y) dx$ является **внутренним** и вычисляется по переменной x в предположении, что переменная y сохраняет постоянное значение на отрезке $[a; b]$. В результате вычисления этого интеграла получится выражение, содержащее только переменную x . После того, как это выражение будет найдено, можно выполнить **внешнее** интегрирование, т. е. осуществлять интегрирование по переменной y . В результате второго интегрирования получится число.

Во втором повторном интеграле порядок интегрирования меняется: внутреннее интегрирование ведется по переменной y , а внешнее по переменной x . В результате внутреннего интегрирования получается функция переменной x , а в результате внешнего интегрирования по переменной x получается число.

Порядок интегрирования выбирается с учетом вида подынтегральной функции $f(x, y)$ и результат не зависит от порядка интегрирования.

Частный случай

Если подынтегральная функция $f(x, y)$ является **функцией с разделяющимися переменными**, т.е. имеет вид $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, то формулы вычисления двойных интегралов преобразуются к виду:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D h(y) g(x) dx dy = \int_c^d h(y) dy \cdot \int_a^b g(x) dx;$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D h(y) g(x) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy.$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по

области $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3\}$.

Решение. Решение начинается с выбора порядка вычисления и расстановки пределов интегрирования в повторных интегралах. Учитывая геометрический смысл такого интеграла (объем призмы, ограниченной сверху плоскостью $z = x + y$) введем обозначение для интеграла

$$\begin{aligned} V = \iint_D (x + y) dx dy &= \int_1^2 dx \int_0^3 (x + y) dy = \int_1^2 dx \left(xy + y^2/2 \right) \Big|_0^3 = \\ &= \int_1^2 dx \left(x \cdot 3 + \frac{3^2}{2} - \left(x \cdot 0 + \frac{0^2}{2} \right) \right) = \int_1^2 \left(3x + \frac{9}{2} \right) dx = \\ &= 3 \int_1^2 x dx + \frac{9}{2} \int_1^2 dx = \left(3 \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} x \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{3}{2} (x^2 + 3x) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} (2^2 + 3 \cdot 2 - (1^2 + 3 \cdot 1)) = 9. \end{aligned}$$

Ответ. $V = 9$ куб. ед.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по

области $D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3\}$.

Решение. Вычислим интеграл с учетом вида подынтегральной функции

$$V = \iint_D xy^2 dx dy = \int_1^2 x dx \cdot \int_0^3 y^2 dy =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{(2^2 - 1^2)}{2} \cdot \frac{(3^3 - 0^3)}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{3} = \frac{9}{2}.$$

Ответ. $V = 9/2$ куб. ед.

3.3. Двойной интеграл по криволинейной области

В случае **криволинейной** области двойной интеграл вычисляется с учетом вида области по формулам:

$$1) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy$$

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\};$$

$$2) \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

$$D = \{(x, y): x_1(y) \leq x \leq x_2(y); c \leq y \leq d\}.$$

Пример 3. С помощью двойного интеграла, вычислить **площадь** S криволинейной области

$$D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 2; x^2 - 1 \leq y \leq 5 - x\}.$$

Решение. Площадь криволинейной области D вычислим с помощью двойного интеграла по формуле

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_{-3}^2 dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy.$$

1) Вначале с помощью формулы Ньютона-Лейбница разбираемся с внутренним интегралом

$$\int_{x^2-1}^{5-x} dy = y \Big|_{x^2-1}^{5-x} = 5 - x - (x^2 - 1) = 6 - x - x^2.$$

2) Результат, полученный на первом шаге, подставляем во внешний интеграл

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-3}^2 dx \int_{x^2-1}^{5-x} dy = \int_{-3}^2 (6-x-x^2) dx = \left(6x - x^2/2 - x^3/3\right) \Big|_{-3}^2 = \\
 &= 12 - 2 - 8/3 - (-18 - 9/2 + 9) = \\
 &= 10 - \frac{8}{3} + 9 + \frac{9}{2} = 19 + \frac{27-16}{6} = 19 + \frac{11}{6} = 19 + 1\frac{5}{6} = 20\frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

Ответ. $S = 20\frac{5}{6}$ кв.ед.

Пример 4. Используя двойной интеграл, вычислить *объем* V криволинейного тела G , если

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1-x; \quad 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

Решение. Основанием тела служит криволинейная область $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1-x\}$, сверху тело ограничено плоскостью $z = 1-x-y$, поэтому объем тела можно вычислить следующим образом

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D z(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^{1-x} ((1-x)-y) dy \right) = \\
 &= \int_0^1 dx \left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} = \\
 &= \int_0^1 dx \left(\left((1-x)(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) - \left((1-x) \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right) \right) = \\
 &= \int_0^1 dx \left((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = \frac{1}{2} \left(x - 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{6}.$$

Ответ. $V = 1/6$ куб.ед.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интегралы по прямоугольной области:

1. $\iint_D xy dx dy$ $D = \{(x; y): 3 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 1\};$
2. $\iint_D xy^2 dx dy$ $D = \{(x; y): 2 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 1\};$
3. $\iint_D x^2 y dx dy$ $D = \{(x; y): 3 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq 2\};$
4. $\iint_D (x - y) dx dy$ $D = \{(x; y): 1 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 3\};$
5. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ $D = \{(x; y): 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\};$
6. $\iint_D (x + y) dx dy$ $D = \{(x; y): 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2 - x\}.$

Ответы. 1. 4; 2. 2; 3. 126; 4. 9; 5. 17/6; 6. 8/3..

3.4. Тройной интеграл и его применение

Тройной интеграл вычисляется от функции трех переменных $f(x, y, z)$ по области $W = \{(x, y, z)\}$ и записывается в виде:

$$I = \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz.$$

Основные свойства тройного интеграла

1. Интеграл суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\begin{aligned} & \iiint_W (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dx dy dz = \\ & = \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz \pm \iiint_W g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

2. Константу можно выносить за знак интегрирования

$$\iiint_W C f(x, y, z) dx dy dz = C \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz, \quad C \in R.$$

3. Если область W объединяет две области ($W = W_1 \cup W_2$),

то

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{W_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Приложения тройного интеграла

1. Тройной интеграл от функции $f(x, y, z) \equiv 1$ выражает **объем** V области W

$$V = \iiint_W dx dy dz.$$

2. Тройной интеграл от плотности массы $p(x, y, z)$ выражает **массу** M области W

$$M = \iiint_W p(x, y, z) dx dy dz.$$

3.5. Вычисление тройного интеграла

Тройной интеграл по области $W = \{(x; y; z) :$

$$a \leq x \leq b; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x); \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

вычисляется как повторный интеграл по формуле

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x, y, z) dz.$$

То есть процедура вычисления предполагает последовательное вычисление трех определенных интегралов.

Частные случаи

I. Если область интегрирования – **прямоугольный параллелепипед**

$(W = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq k\})$, то процесс вычисления существенно упрощается и формула вычисления тройного интеграла примет вид

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^k f(x, y, z) dz.$$

II. Если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ является функцией с **разделяющимися переменными**, т.е. имеет вид $f(x, y, z) = g(x) \cdot h(y) \cdot p(z)$, то формула вычисления тройных интегралов преобразуется к более простому виду

$$\begin{aligned} \iiint_W f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_W g(x) \cdot h(y) \cdot p(z) dx dy dz = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy \cdot \int_e^k p(z) dz. \end{aligned}$$

Примеры вычисления тройных интегралов

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iiint_W xy^2(z-1) dx dy dz$ по области $W = \{(x, y, z): 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$.

Решение. Подынтегральная функция является функцией с разделяющимися переменными, поэтому вычисление данного интеграла сводится к вычислению произведения трех определенных интегралов

$$\begin{aligned} I = \iiint_W xy^2(z-1) dx dy dz &= \int_1^2 (z-1) dz \cdot \int_0^1 y^2 dy \cdot \int_2^3 x dx = \\ &= \left(\frac{z^2}{2} - z \right) \Big|_1^2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 = \end{aligned}$$

$$= \left(\left(\frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right) \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{12}.$$

Ответ. $I = 5/12$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \iiint_W (x + y - z) dx dy dz$ по области $W = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

Решение. Подынтегральная функция не является функцией с разделяющимися переменными, поэтому вычисление данного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов

$$\begin{aligned} I &= \iiint_W (x + y - z) dx dy dz = \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x + y - z) dy = \\ &= \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x - z + y) dy = \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dx \left((x - z)y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dx \left((x - z) \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right) - \left((x - z) \cdot 0 + \frac{0^2}{2} \right) = \\ &= \int_0^2 dz \left(\int_{-1}^1 \left(x - z + \frac{1}{2} \right) dx \right) = \int_0^2 dz \left(\frac{x^2}{2} + \left(-z + \frac{1}{2} \right) x \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \int_0^2 dz \left(\left(\frac{1^2}{2} + \left(-z + \frac{1}{2} \right) \cdot 1 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + \left(-z + \frac{1}{2} \right) (-1) \right) \right) = \\ &= \int_0^2 dz (1 - z - z) = \int_0^2 (1 - 2z) dz = \left(z - 2 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(z - z^2 \right) \Big|_0^2 = -2.. \end{aligned}$$

Ответ. $I = -2$.

Пример 3. Используя тройной интеграл, вычислить **объем** V криволинейной области G , если

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Решение. Объем криволинейной области G будем вычислять по формуле $V = \iiint_G dx dy dz$. Заменим тройной интеграл

повторными интегралами

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy z \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \int_0^1 dx \left((1-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{2 \cdot 3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Ответ. $V = 1/6$ куб. ед.

Глава 4. Теория вероятностей и математическая статистика

4.1. Теория вероятностей

4.1.1. Случайные величины

Определение. *Случайной величиной* называется величина, принимающая в результате испытания только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые не могут быть учтены.

Различают два типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

Определение. Случайная величина X называется *дискретной*, если в результате испытания она принимает одно из конечного или бесконечного множества значений $x_1, x_2, x_3, \dots$

Определение. Случайная величина X называется *непрерывной*, если множество ее значений полностью заполняет некоторый интервал $(a; b)$.

Определение. Соотношения, устанавливающие связь между возможными значениями случайной величины X и их

вероятностями называется **законом распределения** случайной величины.

4.1.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение. *Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины* называется зависимость между возможными значениями $x_1, x_2, x_3, \dots$ и их вероятностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой указаны все возможные значения случайной величины X , расположенные в возрастающем порядке, а во второй строке – вероятности этих значений. Сумма чисел во второй строке равна 1: $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1$.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Определение. *Математическим ожиданием $M(X)$* дискретной случайной величины X называется число, вычисляемое по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

Определение. *Дисперсией $D(X)$* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - (M(X))^2.$$

Определение. *Среднеквадратическим отклонением σ* случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются числовыми характеристиками, служащими мерами рассеяния возможных значений случайной величины X вокруг ее математического ожидания.

4.1.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определение. *Функцией распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, равная при каждом $x \in R$ вероятности того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее величины x

$$F(x) = P(X < x), \quad x \in R.$$

Свойства функции распределения

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \quad x \in R, \quad F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$
2. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) < F(x_2).$
3. $P(a < x < b) = F(b) - F(a).$

Определение. *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, задаваемая равенством $F'(x) = f(x), \quad x \in R.$

Свойства плотности распределения

1. $f(x) \geq 0, \quad x \in R.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad x \in R.$
4. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx.$

Определение. *Математическим ожиданием* $M(X)$ непрерывной случайной величины X называется число, вычисляемое по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Определение. *Дисперсией* $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx.$$

Определение. *Среднеквадратическим отклонением* $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Определение. Непрерывная случайная величина X называется *нормально распределенной*, если ее плотность распределения задана функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R,$$

где $m = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$, $\sigma^2 = D(X)$.

Функция распределения вероятностей нормального закона распределения вычисляется по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ функция Лапласа, ее значения даны

в таблице 3 (см Гл. 6. Приложения).

Вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(a; b)$, вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины X от ее математического ожидания меньше числа $\delta > 0$, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} P(|X - M(X)| < \delta) &= P(-\delta < X - M(X) < \delta) = \\ &= P(-\delta + M(X) < X < \delta + M(X)) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Окончательно имеем
$$P(|X - M(X)| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

4.2. Математическая статистика

4.2.1. Основные определения

К типичным **задачам математической статистики** относятся задача определения **закона** распределения случайной величины по статистическим данным и задача нахождения неизвестных **параметров** распределения случайной величины.

Определение 1. Генеральной совокупностью называется множество всех однородных объектов, каждый из которых обладает одним и тем же признаком.

Определение 2. Выборочной совокупностью называется множество объектов, случайным образом выбранных из генеральной совокупности.

Определение 3. Объемом совокупности называется число объектов этой совокупности.

Определение 4. Выборка называется **репрезентативной** (**представительной**), если ее объекты выбираются случайным образом с одинаковой вероятностью.

Пусть для изучения некоторого количественного признака X из всей генеральной совокупности объема N извлечена выборка объема n .

Определение 5. Наблюдаемые разные значения $x_1, x_2, \dots, x_v, 1 \leq v \leq n$, признака X называются **вариантами**, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называется **вариационным рядом**.

Определение 6. *Статистическим рядом* выборки называется набор из ν , $1 \leq \nu \leq n$, значений вариант некоторого признака X объектов выборки, расположенных в порядке возрастания и соответствующих им частот m_i или относительных частот m_i / n (оценок вероятностей появления вариант x_i в n независимых испытаниях). При этом

$$m_1 + m_2 + \dots + m_\nu = n \quad \text{и} \quad m_1 / n + m_2 / n + \dots + m_\nu / n = 1.$$

Если число вариант очень велико, то составляется сгруппированный (интервальный) статистический ряд.

Определение 7. *Интервальным статистическим рядом* выборки называется упорядоченная последовательность k интервалов $[a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$, с указанием количества m_i значений x_j , попавших в них.

Причем, если n – объем выборки, то $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Для наглядного представления распределения наблюдаемого признака, исследуемого по выборке, используется гистограмма.

Определение 8. *Гистограммой* интервального статистического ряда выборки называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, построенных на оси Ox , основанием которых являются отрезки $[a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$, а высоты соответственно равны относительным частотам m_i / n или просто частотам m_i .

4.2.2. Статистические оценки параметров распределения

По имеющейся выборке можно дать оценку математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

Определение 1. Несмещенной оценкой математического ожидания $M(X)$ называется *среднее арифметическое* статистических значений изучаемой случайной величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\nu} n_i x_i, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_\nu.$$

где ν – количество вариант $x_1, x_2, \dots, x_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$.

Определение 2. Смещенной оценкой дисперсии $D(X)$ называется **выборочная дисперсия**

$$D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^v n_i (x_i - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^v n_i x_i^2 - (\bar{X})^2.$$

Определение 3. Несмещенной оценкой дисперсии $D(X)$ называется **исправленная выборочная дисперсия**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^v n_i (x_i - \bar{x}_i)^2.$$

При вычислении S^2 можно пользоваться более удобной формулой

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\overline{X^2} - (\bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^k m_i x_i^2 - (\bar{X})^2 \right).$$

Определение 4. Оценка называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание совпадает с генеральным значением.

Например, $M(\bar{X}) = M(X)$, $M(S^2) = \sigma^2$, где $M(X)$ и σ^2 — являются истинными математическим ожиданием и дисперсией генеральной совокупности.

Замечание. Среднее арифметическое $\bar{X}$ и исправленная выборочная дисперсия S^2 является, в отличии от выборочной дисперсии $D(X)$, **несмещенными** оценками. Поэтому используется в расчетах именно они.

Определение 5. Оценкой s среднего квадратического отклонения $\sigma(X)$ называется квадратный корень из исправленной выборочной дисперсии S^2 , т.е.

$$s = \sqrt{S^2}.$$

Если число вариантов очень велико, то составляется **интервальный** (сгруппированный) статистический ряд. Количество интервалов k выбирается с учетом размера выборки и в качестве инвариант в оценочных формулах берутся середины

интервалов $c_1, c_2, \dots, c_k$. В этом случае оценочные формулы имеют вид

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k m_i c_i \quad \text{и} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^k m_i c_i^2 - (\bar{X})^2 \right)$$

где m_i – количества значений, попавших i -й интервал.

4.2.3. Интервальные оценки параметров нормального распределения

Определение. *Интервальной оценкой математического ожидания M нормального распределения при неизвестной дисперсии* называется интервал

$$(\bar{X} - \varepsilon ; \bar{X} + \varepsilon), \quad \varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

удовлетворяющий неравенству

$$P(\bar{X} - \varepsilon < M < \bar{X} + \varepsilon) = \gamma,$$

где γ – заданная доверительная вероятность, M – истинное математическое ожидание, $\bar{X}$ – точечная оценка математического ожидания, $s = \sqrt{S^2}$ – корень из исправленной выборочной дисперсии, n – объем выборки, число $t_\gamma = t(n; \gamma)$ вычисляется из таблицы 1 по значениям γ и n (см. Гл.6. Приложения).

Следовательно, интервальная оценка математического ожидания, с доверительной вероятностью γ при неизвестной дисперсии, вычисляется по формуле

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Определение. *Интервальной оценкой среднего квадратического отклонения σ нормального распределения* называется интервал

$$(s - \varepsilon ; s + \varepsilon), \quad \varepsilon = q_\gamma \cdot s,$$

удовлетворяющий неравенству

$$P(s - \varepsilon < \sigma < s + \varepsilon) = \gamma,$$

где γ – заданная доверительная вероятность, σ – истинное среднее квадратическое отклонение, $s = \sqrt{S^2}$ – корень из исправленной выборочной дисперсии, n – объем выборки, число $q_\gamma = q(n; \gamma)$ вычисляется из таблицы 2 по значениям γ и n (см. Гл.6. Приложения).

Следовательно, интервальная оценка среднего квадратического отклонения σ , с доверительной вероятностью γ при неизвестной дисперсии, вычисляется с учетом $\varepsilon = q_\gamma \cdot s$ по формуле $s - q_\gamma \cdot s < \sigma < s + q_\gamma \cdot s$.

Следовательно, интервальная оценка среднего квадратического отклонения находится по формулам:

$$s(1 - q_\gamma) < \sigma < s(1 + q_\gamma), \text{ если } q_\gamma < 1;$$

$$0 < \sigma < s(1 + q_\gamma), \text{ если } q_\gamma > 1.$$

Пример 1. По данному статистическому ряду

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n	1	3	4	5	3	2	2

найти доверительные интервалы для математического ожидания $M(X)$ и среднего статистического отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$.

Решение. 1) Для оценки математического ожидания воспользуемся интервальной формулой

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $n = 20$, $\gamma = 0,95$. Используя эти данные, в таблице 1 найдем значение $t_\gamma = 2,093$. Теперь вычислим статистическую оценку для $M(X)$

$$\bar{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^7 x_i \cdot m_i = \frac{1}{20} (-3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = 0.$$

Вычислим несмещенную оценку дисперсии

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{1}{n-1} \left(\overline{X^2} - (\bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^k m_i x_i^2 - (\bar{X})^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{19} (9 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 2 - 0) = \\
 &= \frac{1}{19} (9 + 12 + 4 + 3 + 8 + 18) = \frac{54}{19} \approx 2,84.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $s = \sqrt{S^2} \approx \sqrt{2,84} \approx 1,685$. С учетом значения $s \approx 1,685$ и интервальной оценки

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

искомый доверительный интервал для математического ожидания имеет вид

$$0 - 2,095 \cdot \frac{1,685}{\sqrt{20}} < M < 0 + 2,095 \cdot \frac{1,685}{\sqrt{20}}.$$

Выполнив вычисления, получим $-0,76 < M < 0,76$.

2) Для оценки среднего квадратического отклонения, воспользуемся, с учетом значения $q_\gamma = q(n; \gamma)$, интервальной формулой

$$s(1 - q_\gamma) < \sigma < s(1 + q_\gamma).$$

Число $q_\gamma = 0,37$ вычислено из таблицы 2 согласно значениям $n = 20$, $\gamma = 0,95$. Следовательно,

$$1,685 (1 - 0,37) < \sigma < 1,685 (1 + 0,37).$$

$$1,06 < \sigma < 2,31$$

Ответ. $M(X) \in (-0,76; 0,76)$, $\sigma \in (1,06; 2,31)$.

Глава 5. Задания для контрольной работы с образцами решений

Контрольная работа содержит задания по основным темам курса и включает 15 заданий. Вариант задания выбирается по последней цифре зачетной книжки. Если последняя цифра нуль, то берется вариант №10. Каждое задание контрольной работы сопровождается подробным решением аналогичного задания.

5.1. Задания по теме «Комплексные числа»

5.1.1. Задание № 1

Условие. Записать комплексное число $z = z_1 + z_2$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Вариант	z_1	z_2
1.	$z_1 = -2$	$z_2 = 2 \left(\cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi \right)$
2.	$z_1 = -2i$	$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right)$
3.	$z_1 = -2$	$z_2 = 2 \left(\cos \frac{1}{3} \pi + i \sin \frac{1}{3} \pi \right)$
4.	$z_1 = -2i$	$z_2 = \left(\cos \frac{1}{6} \pi + i \sin \frac{1}{6} \pi \right)$
5.	$z_1 = -1$	$z_2 = \left(\cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi \right)$
6.	$z_1 = 2$	$z_2 = \left(\cos \frac{5}{3} \pi + i \sin \frac{5}{3} \pi \right)$
7.	$z_1 = 2i$	$z_2 = \left(\cos \frac{7}{6} \pi + i \sin \frac{7}{6} \pi \right)$
8.	$z_1 = 1$	$z_2 = 2 \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$

9.	$z_1 = i$	$z_2 = 4 \left(\cos \frac{1}{3} \pi + i \sin \frac{1}{3} \pi \right)$
10.	$z_1 = -i$	$z_2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi)$

Образец решения задания № 1

Условие. Найти алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи комплексного числа $z = z_1 + z_2$,

если $z_1 = 2i$, $z_2 = \cos \frac{7}{6} \pi + i \sin \frac{7}{6} \pi$.

Решение. Запишем число z_2 в алгебраической форме

$$\begin{aligned} z_2 &= \cos \frac{7}{6} \pi + i \sin \frac{7}{6} \pi = \cos \left(\pi + \frac{1}{6} \pi \right) + i \sin \left(\pi + \frac{1}{6} \pi \right) = \\ &= -\cos \frac{1}{6} \pi - i \sin \frac{1}{6} \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Выполняя операцию сложения, получим комплексное число z в алгебраической форме

$$z = z_1 + z_2 = 2i + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Запишем комплексное число z в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент

$$\rho = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{3/2}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \pi/3 = 2\pi/3.$$

Представим комплексное число z в тригонометрической и показательной формах $z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right) = \sqrt{3} e^{i 2\pi/3}$.

Ответ.

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = \sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt{3} e^{i \frac{2}{3}\pi}.$$

5.1.2. Задание № 2

Условие. Вычислить произведение и частное комплексных чисел z_1, z_2 .

Вариант	z_1	z_2
1.	$z_1 = -i$	$z_2 = \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right)$
2.	$z_1 = 2$	$z_2 = \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right)$
3.	$z_1 = -2i$	$z_2 = \left(\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi \right)$
4.	$z_1 = -8$	$z_2 = \left(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi \right)$
5.	$z_1 = -8i$	$z_2 = 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right)$
6.	$z_1 = -i$	$z_2 = 4 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right)$
7.	$z_1 = -2i$	$z_2 = \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right)$
8.	$z_1 = 1$	$z_2 = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$
9.	$z_1 = -i$	$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$
10.	$z_1 = i$	$z_2 = \left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi \right)$

Образец решения задания № 2

Условие. Вычислить произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2 , если $z_1 = 2i$, $z_2 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi$.

Решение. Представим второе число в алгебраической форме

$$z_2 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

Найдем произведение комплексных чисел z_1 и z_2

$$z_1 \cdot z_2 = 2i \cdot \left(-\sqrt{3}/2 - i1/2\right) = -\sqrt{3}i - i^2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Найдем частное комплексных чисел z_1 и z_2

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2i}{-\sqrt{3}/2 - i1/2} = -4 \frac{i}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = -4 \frac{i\sqrt{3} - i^2}{(\sqrt{3})^2 - (i)^2} = \\ &= -4 \frac{i\sqrt{3} - (-1)}{3 - (-1)} = -4 \frac{i\sqrt{3} + 1}{3 + 1} = -4 \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ. $z_1 \cdot z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_1/z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

5.1.3. Задание № 3

Условие. Вычислить комплексное число z^{12} , используя формулу Муавра.

1.	$z = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$	6.	$z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$
2.	$z = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$	7.	$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$
3.	$z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$	8.	$z = \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3}$
4.	$z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$	9.	$z = \cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3}$
5.	$z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$	10.	$z = \cos \frac{13\pi}{3} + i \sin \frac{13\pi}{3}$

Образец решения задания № 3

Условие. Вычислить комплексное число z^{18} , используя формулу Муавра, если

$$z = \cos \frac{11}{12} \pi + i \sin \frac{11}{12} \pi.$$

Решение. Представим комплексное число z в показательной форме и возведем его в степень

$$\begin{aligned} z^{18} &= \left(\cos \frac{11}{12} \pi + i \sin \frac{11}{12} \pi \right)^{18} = \cos \left(\frac{11}{12} \pi 18 \right) + i \sin \left(\frac{11}{12} \pi 18 \right) = \\ &= \cos \frac{33}{2} \pi + i \sin \frac{33}{2} \pi = \cos \left(16\pi + \frac{1}{2} \pi \right) + i \sin \left(16\pi + \frac{1}{2} \pi \right) = \\ &= \cos \frac{1}{2} \pi + i \sin \frac{1}{2} \pi = 0 + i \cdot 1 = i. \end{aligned}$$

Ответ. $z^{18} = i$.

5.1.4. Задание № 4

Условие. Найти все значения корней комплексных чисел.

Вариант	1.	2.	3.	4.	5.
	$\sqrt[3]{-1}$	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{i}$	$\sqrt[6]{1}$	$\sqrt{i}$
Вариант	6.	7.	8.	9.	10.
	$\sqrt{1+i}$	$\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$	$\sqrt[3]{-1+i}$	$\sqrt[3]{1-i}$	$\sqrt[3]{-1-i}$

Образец решения задания № 4

Условие. Найти все значения корней КЧ $z = \sqrt[3]{-8}$.

Решение. Для нахождения корней комплексного числа будем использовать обобщенную формулу Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Для этого нужно представить комплексное число $z = -8$ в тригонометрической форме. Вычислим его модуль и аргумент

$$|z| = |-8| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{arctg} \frac{0}{-1} = \operatorname{arctg} 0 = \pi.$$

Если изобразить КЧ $z = -8$ на комплексной плоскости (см. рис 21), то очевидно, что $\varphi = \pi$. Т. о., тригонометрическая форма имеет вид $z = -8 = -8 + i \cdot 0 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

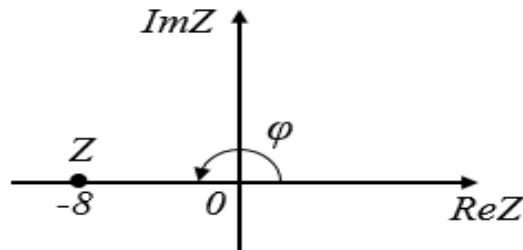


Рис 21

Согласно обобщенной формуле Муавра, имеем

$$z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2\left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ комплексный корень будет иметь вид

$$\omega_0 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

При $k = 1$ комплексный корень будет иметь вид

$$\omega_1 = 2\left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2.$$

При $k = 2$ комплексный корень будет иметь вид

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 2\left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right) = \\ &= 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Значения корней лежат на окружности радиуса

$R = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[3]{8} = 2$ и образуют правильный треугольник (см. рис. 22).

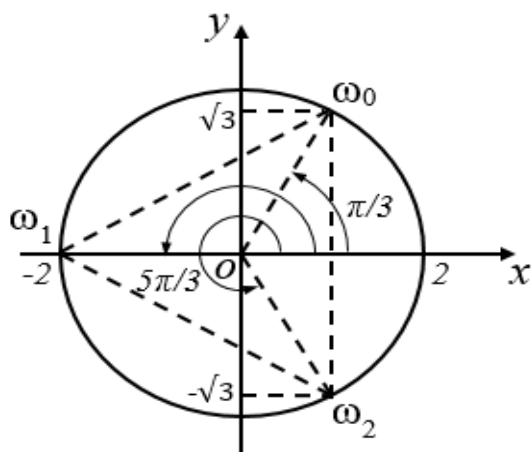


Рис. 22

Ответ. $\omega_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $\omega_1 = -2$, $\omega_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

5.2. Задания по теме «Дифференциальные уравнения»

5.2.1. Задание № 5

Условие. Проверить, является ли данная функция *частным* решением соответствующего дифференциального уравнения.

Вариант	Функция	Уравнение
1.	$y = x^2$	$y'x - 2y = 0$
2.	$y = \sqrt{x^2 + 5}$	$y'y - x = 0$
3.	$y = x^2 + x + 1$	$2y - y' - y'' = 2x^2 - 1$
4..	$y = 1/x$	$y' \cdot y'' - y''' \cdot y = 1/x^5$
5.	$y = (x-1)e^x$	$y' - y = 2e^x$
6.	$y = e^{2x}$	$y' + 2y'' = 10e^{2x}$
7.	$y = \ln(\cos x)$	$y' = -\operatorname{tg} x$
8.	$y = \sin x$	$y' \operatorname{tg} x - y = 0$
9.	$y = (x-2)(x-3)$	$y' = xy'' - 5$
10.	$y = \cos x$	$y' \operatorname{ctg} x + y = 0$

Образец решения задания № 5

Условие. Проверить, является ли функция $y = 2x \ln x + x$ *частным* решением дифференциального уравнения $xy' = y + 2x$.

Решение. Вычислим производную решения

$$\begin{aligned} y' &= (2x \ln x + x)' = 2(x)' \ln x + 2x(\ln x)' + (x)' = \\ &= 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3. \end{aligned}$$

Выражения y и y' подставим в уравнение $xy' = y + 2x$

$$\begin{aligned} x(2 \ln x + 3) &= (2x \ln x + x) + 2x \\ 2x \ln x + 3x &= 2x \ln x + 3x. \end{aligned}$$

Полученное числовое тождество говорит том, что указанная функция является решением данного ДУ.

Ответ. Данная функция является частным решением ДУ.

5.2.2. Задание № 6

Условие. Проверить, является ли данная функция $y = y(x)$ *общим* решением соответствующего дифференциального уравнения.

Вариант	Функция	Уравнение
1.	$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$	$y'' + y' = 0$
2.	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$	$y'' - y' - 2y = 0$
3.	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$	$y'' - 5y' + 6y = 0$
4.	$y = C_1 x + C_2 x^2$	$y'' - 2 \frac{y'}{x} + 2 \frac{y}{x^2} = 0$
5.	$y = C_1 x^{3/2} + C_2$	$2xy'' - y' = 0$
6.	$y = C_1 x + C_2 \ln x$	$x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$
7.	$y = x(C - \ln x)$	$xy' - y + x = 0$
8.	$y = C_1 e^{-x} + xC_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$	$y'' + 2y' + y = e^x$
9.	$y = C_1 e^x + xC_2 e^x$	$y'' - 2y' + y = 0$
10.	$y = C_1 e^x + xC_2 e^x + x + 3$	$y'' - 2y' + y = x + 1$

Образец решения задания № 6

Условие. Проверить, является ли функция $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ **общим** решением дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$

Решение. Вычислим производную первого порядка

$$y' = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)' = C_1 (\cos 3x)' + C_2 (\sin 3x)' = \\ = -C_1 \sin 3x \cdot (3x)' + C_2 \cos 3x \cdot (3x)' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

Вычислим производную второго порядка

$$y' = (y')' = (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)' = \\ = -3C_1 (\sin 3x)' + 3C_2 (\cos 3x)' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x.$$

Выражения y и y'' подставим в уравнение $y'' + 9y = 0$
 $y'' + 9y = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x + 9(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = 0.$

Полученное равенство говорит том, что указанная функция является решением данного дифференциального уравнения.

Ответ. Функция является решением данного уравнения.

5.2.3. Задание № 7

Условие. Решить дифференциальное уравнение.

1.	$4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$
2.	$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
3.	$\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$
4.	$\sqrt{3+y^2} - y dy - x^2 y dy = 0$
5.	$6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$
6.	$x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$
7.	$(5 + e^{2x}) dy + ye^{2x} dx = 0$
8.	$x\sqrt{1-y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$
9.	$6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$

10.

$$x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$$

Образец решения задания № 7**Условие.** Решить дифференциальное уравнение

$$y\sqrt{2+x^2}dy + x\sqrt{3+y^2}dx = 0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду

$$y\sqrt{2+x^2}dy = -x\sqrt{3+y^2}dx.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем его к виду удобному для интегрирования

$$y\sqrt{2+x^2}dy = -x\sqrt{3+y^2}dx \quad | : \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt{3+y^2}$$

$$\frac{y\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt{3+y^2}}dy = -\frac{x\sqrt{3+y^2}}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt{3+y^2}}dx$$

$$\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}dy = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx \quad \int \frac{y}{\sqrt{3+y^2}}dy = -\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx.$$

Сделаем замены, приводящие к табличным интегралам:

$$\text{Замена: } t = 3 + y^2; \quad dt = (3 + y^2)' dy = 2ydy;$$

$$\text{Замена: } z = 2 + x^2; \quad dz = (2 + x^2)' dx = 2xdx.$$

$$\text{Получим} \quad \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = -\int \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dz}{2}, \quad \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\int z^{-\frac{1}{2}} dz,$$

$$t^{-\frac{1}{2}+1} = -z^{-\frac{1}{2}+1} + C, \quad t^{\frac{1}{2}} = -z^{\frac{1}{2}} + C, \quad \sqrt{t} = -\sqrt{z} + C, \quad C \in R,$$

$$\sqrt{3+y^2} = -\sqrt{2+x^2} + C, \quad C \in R.$$

$$\text{Ответ.} \quad \sqrt{3+y^2} = -\sqrt{2+x^2} + C, \quad C \in R.$$

5.2.4. Задание № 8**Условие.**

- 1) Найти общее решение дифференциального уравнения.
- 2) Решить задачу Коши с данными начальными условиями.

1.	$y'' - 3y' - 28y = 0$	$y(0) = -2$	$y'(0) = -25$
2.	$y'' - 6y' + 9y = 0$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 0$
3.	$y'' - 10y' + 41y = 0$	$y(0) = 2$	$y'(0) = 14$
4.	$y'' + 6y' + 10y = 0$	$y(0) = 1$	$y'(0) = -1$
5.	$y'' + 2y' + y = 0$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 0$
6.	$y'' + y = 0$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 1$
7.	$y'' + y' - 2y = 0$	$y(0) = 2$	$y'(0) = -1$
8.	$y'' + 2y' + 5y = 0$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 1$
9.	$y'' + 3y' + 2y = 0$	$y(0) = 2$	$y'(0) = -3$
10.	$y'' - 8y' + 16y = 0$	$y(0) = 1$	$y'(0) = 1$

Образец решения задания № 8

Задание № 8.1.

1) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

2) Решить задачу Коши с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 6.$$

Решение.

1) Решим дифференциальное уравнение $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^2 - 10k + 25 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5.$$

Так как $k_1 = k_2 = k = 5$, то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1 e^{5x} + x C_2 e^{5x} = e^{5x} (C_1 + x C_2), \quad C_1, C_2 \in R.$$

Проверка. Вычислим первую и вторую производные общего решения

$$y' = (C_1 e^{5x} + x C_2 e^{5x})' = (C_1 e^{5x})' + (x C_2 e^{5x})' =$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 e^{5x} (5x)' + C_2 e^{5x} + x C_2 e^{5x} (5x)' = 5C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x} (1 + 5x) \\
y'' &= (y')' = (5C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x} (1 + 5x))' = \\
&= 25C_1 e^{5x} + 10C_2 e^{5x} + 25C_2 e^{5x} x.
\end{aligned}$$

Полученные производные подставим в исходное уравнение

$$\begin{aligned}
y'' - 10y' + 25y &= 25C_1 e^{5x} + 10C_2 e^{5x} + 25C_2 e^{5x} x - \\
&- 10(5C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x} + 5xC_2 e^{5x}) + 25(C_1 e^{5x} + xC_2 e^{5x}) = 0.
\end{aligned}$$

Т.е. общее решение найдено верно.

2) Найдем решение задачи Коши. Для этого составим с учетом начальных условий систему и решим ее относительно констант C_1 и C_2

$$\begin{cases} y = C_1 e^{5x} + x C_2 e^{5x} \\ y' = 5C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x} (1 + x) \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = 5C_1 + C_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Полученное решение примет вид $y_K = e^{5x} + x e^{5x} = e^{5x} (1 + x)$. Правильность вычисления коэффициентов C_1 и C_2 можно подтвердить проверкой

$$\begin{aligned}
y'_K &= (e^{5x} + x e^{5x})' = 5e^{5x} + e^{5x} + 5x e^{5x} = 6e^{5x} + 5x e^{5x} \\
y(0) &= (e^{5x} + x e^{5x}) \Big|_{x=0} = 1, \quad y'(0) = (6e^{5x} + 5x e^{5x}) \Big|_{x=0} = 6.
\end{aligned}$$

Таким образом, константы C_1 и C_2 решения задачи Коши найдены верно. Решение задачи Коши имеет вид

$$y_K = e^{5x} + x e^{5x} = e^{5x} (1 + x).$$

Ответ.

1) $y_0 = C_1 e^{5x} + x C_2 e^{5x}$, $C_1, C_2 \in R$, *общее решение.*

2) $y_K = e^{5x} + x e^{5x}$ *решение задачи Коши.*

Задание № 8.2.

1) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = 0.$$

2) Решить задачу Коши с начальными условиями

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Решение.

1) Решим дифференциальное уравнение $y'' - 4y' = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^2 - 4k = 0, \quad k(k - 4) = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 4.$$

Так как корни вещественные и разные, то общее решение имеет вид

$$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Проверка. Вычислим первую и вторую производные общего решения

$$y_0' = (C_1 + C_2 e^{4x})' = (C_1)' + (C_2 e^{4x})' = 0 + C_2 e^{4x} (4x)' = 4C_2 e^{4x}$$

$$y_0'' = (4C_2 e^{4x})' = 16C_2 e^{4x}.$$

Полученные производные подставим в исходное уравнение

$$y'' - 4y' = 16C_2 e^{4x} - 4 \cdot 4C_2 e^{4x} = 0.$$

Т.е. общее решение найдено верно.

2) Найдем решение задачи Коши, т. е. найдем числовые значения констант C_1 и C_2 . Для этого составим с учетом начальных условий систему и решим ее

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{4x} \\ y' = 4C_2 e^{4x} \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 2 \\ y'(0) = 4C_2 e^0 = 4C_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Правильность вычисления коэффициентов C_1 и C_2 можно подтвердить проверкой условий Коши

$$y(0) = (1 + e^{4x}) \Big|_{x=0} = 1 + e^0 = 2, \quad y'(0) = 4e^{4x} \Big|_{x=0} = 4.$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид

$$y_K = 1 + e^{4x}.$$

Ответ. 1) $y_0 = C_1 + C_2 e^{4x}, \quad C_1, C_2 \in R$, *общее решение.*

2) $y_K = 1 + e^{4x}$ *решение задачи Коши.*

Задание № 8.3.

1) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 8y' + 25y = 0.$$

2) Решить задачу Коши с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 7.$$

Решение.

1) Решим дифференциальное уравнение $y'' - 8y' + 25y = 0$. Для этого составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$\begin{aligned} k^2 - 8k + 25 &= 0 \\ k_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 25} = 4 \pm \sqrt{-9} = 4 \pm 3\sqrt{-1} = 4 \pm 3i \\ a &= 4 \quad \text{и} \quad b = 3. \end{aligned}$$

Так как корни комплексные, то общее решение имеет вид.

$$\begin{aligned} y_0 &= e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) = \\ &= e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x), \quad C_1, C_2 \in R. \end{aligned}$$

2) Найдем частное решение задачи Коши. Для этого найдем производную общего решения

$$\begin{aligned} y_0' &= \left(e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \right)' = \\ &= 4e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{4x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x). \end{aligned}$$

Для поиска констант C_1 и C_2 , при которых выполняются условия Коши, оставим систему

$$\begin{cases} y = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \\ y' = 4e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 3e^{4x} (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) \end{cases}.$$

Решим систему при начальных условиях $y(0) = 1$ и $y'(0) = 7$. Так как $\sin 0 = 0$ и $\cos 0 = 1$, то

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = 4C_1 + 3C_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ 4C_1 + 3C_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, $y_K = e^{4x} (\cos 3x + \sin 3x)$.

Правильность вычисления коэффициентов C_1 и C_2 можно подтвердить проверкой начальных условий

$$y(0) = e^{4x} (\cos 3x + \sin 3x) \Big|_{x=0} = 1$$

$$y'(0) = \left(4e^{4x} (\cos 3x + \sin 3x) + e^{4x} (-3 \sin 3x + 3 \cos 3x) \right) \Big|_{x=0} = 7.$$

Ответ.

1) $y_0 = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$, $C_1, C_2 \in R$, *общее решение.*

2) $y_K = e^{4x} (\cos 3x + \sin 3x)$ *решение задачи Коши.*

5.3. Задания по теме «Кратные интегралы»

5.3.1. Задание № 9

Условие. Используя двойной интеграл, вычислить площадь криволинейной области D .

1.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi; \sin x + 1 \leq y \leq x + 3\}$
2.	$D = \{(x, y): 1 \leq x \leq e; x \leq y \leq x + 1\}$
3.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi; \sin x \leq y \leq 3\}$
4.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2\pi; \cos x \leq y \leq 2\}$
5.	$D = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; -\sin x \leq y \leq \cos x \right\}$
6.	$D = \left\{ (x, y): \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}; \cos x \leq y \leq \sin x \right\}$
7.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq e^x\}$
8.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; e^x \leq y \leq e^{2x}\}$
9.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 2^x \leq y \leq 5^x\}$
10.	$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi; \cos x \leq y \leq \sin x + 1\}$

Образец решения задания № 9

Условие. Используя двойной интеграл, вычислить площадь криволинейной области D

$$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3 - x\}.$$

Решение. Вычислим площадь, используя двойной интеграл,

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy = \int_0^3 dx \cdot y \Big|_0^{3-x} = \int_0^3 dx (3 - x - 0) = \\ &= \int_0^3 (3 - x) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} - 0 = 9 - 4,5 = 4,5. \end{aligned}$$

Ответ. $S = 4,5$ кв.ед.

5.3.2. Задание № 10

Условие. Вычислить двойной интеграл по области D .

1.	$\iint_D (x + y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3 - x\}$
2.	$\iint_D (x + 2y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}$
3.	$\iint_D (2x + y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq \sqrt{x}\}$
4.	$\iint_D (x + 4y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}$
5.	$\iint_D (4x + y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq x\}$
6.	$\iint_D (x + 3y) y dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq 1\}$
7.	$\iint_D (3x + 2y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; x^3 \leq y \leq x\}$
8.	$\iint_D (2x + y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq x\}$
9.	$\iint_D (x + 2y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2\}$
10.	$\iint_D (x + 4y) dx dy$	$D = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1; x^3 \leq y \leq x\}$

Образец решения задания № 10

Условие. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x+y) dx dy$ по области D , если $D = \{(x; y): 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Решение. Вычисление двойного интеграла будем осуществлять, вычисляя повторные интегралы,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y) dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \\
 &= \int_0^1 dx \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{2} (\sqrt{x})^2 - \left(x \cdot x^2 + \frac{1}{2} (x^2)^2 \right) \right) = \\
 &= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x - x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \\
 &= \left(x^{\frac{3}{2}+1} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} x^{1+1} \frac{1}{2} - x^{3+1} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^{4+1} \frac{1}{5} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \left(x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{2} - x^4 \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^5 \frac{1}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{4-1}{10} = \frac{3}{10}.
 \end{aligned}$$

Ответ. $I = 0,3$.

5.3.3. Задание № 11

Условие. Используя тройной интеграл, вычислить объем V криволинейной области G .

1.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x + 2y\}$
2.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq 2x + y\}$
3.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x + 2y\}$
4.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2x; 0 \leq z \leq x + y\}$

5.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3x; 0 \leq z \leq x + y\}$
6.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x + 2y\}$
7.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2x + y\}$
8.	$G = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x + y\}$
9.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3x; 0 \leq z \leq x + y\}$
10.	$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 3; x \leq y \leq 3x; 1 \leq z \leq x + y\}$

Образец решения задания № 11

Условие. Используя тройной интеграл, вычислить объем V криволинейной области G , если

$$G = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x + y\}.$$

Решение. Объем криволинейной области G будем вычислять по формуле $V = \iiint_G dx dy dz$. От тройного интеграла

перейдем к повторным

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_G dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(z \Big|_0^{x+y} \right) = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^x dy (x + y - 0) = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y) dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^x = \\
 &= \int_0^1 dx \left(x \cdot x + \frac{1}{2} x^2 \right) = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1^3 - 0) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ. $V = \frac{1}{2}$ куб.ед..

5.3.4. Задание № 12

Условие. По области $G = \{(x, y, z)\}$ вычислить тройной интеграл $I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$.

1.	$\iiint_G (x + y - 2z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 1\}$
2.	$\iiint_G (x + 2y + z) dx dy dz$	$G = \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; 1 \leq z \leq 3\}$
3.	$\iiint_G (2x + y + z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 4\}$
4.	$\iiint_G (x + 4y + z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 3\}$
5.	$\iiint_G (x + y + 2z) dx dy dz$	$G = \{-1 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 1\}$
6.	$\iiint_G (x + 3y + z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2\}$
7.	$\iiint_G (3x + y + z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 1; 2 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 1\}$
8.	$\iiint_G (x + 3y + z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 2\}$
9.	$\iiint_G (x + y + 3z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2\}$
10.	$\iiint_D (4x + y + z) dx dy dz$	$G = \{0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2; 1 \leq z \leq 2\}$

Образец решения задания № 12

Условие. По области $G = \{1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 3\}$ вычислить тройной интеграл $I = \iiint_G (x + y + z) dx dy dz$.

Решение. От тройного интеграла перейдем к повторным

$$\begin{aligned}
 \iiint_G (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 ((x + y) + z) dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left((x + y)z + \frac{1}{2}z^2 \right) \Big|_{z=0}^{z=3} = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3x + 3y + \frac{9}{2} \right) dy =
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 dx \left(3xy + 3 \cdot \frac{1}{2} y^2 + \frac{9}{2} y \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 (6x + 6 + 9) dx =$$

$$= \int_0^1 (6x + 15) dx = \left(6 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 15x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = 3 \cdot 4 + 15 \cdot 2 - (3 + 15) = 24.$$

Ответ. $I = 24$.

5.4. Задания по теме «Теория вероятностей и математическая статистика»

5.4.1. Задание № 13

Условие. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти:

1) функцию плотности распределения непрерывной случайной величины X ;

2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X ;

3) построить графики функции распределения и функции плотности распределения случайной величины X .

Вариант	Функция распределения $F(x)$
1.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 4x^2 / 25, & \text{при } 0 < x \leq 5/2 \\ 1, & \text{при } x > 5/2 \end{cases}$
2.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 4x^2 / 9, & \text{при } 0 < x \leq 3/2 \\ 1, & \text{при } x > 3/2 \end{cases}$
3.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 9x^2 / 25, & \text{при } 0 < x \leq 5/3 \\ 1, & \text{при } x > 5/3 \end{cases}$

4.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 16x^2 / 25, & \text{при } 0 < x \leq 5/4 \\ 1, & \text{при } x > 5/4 \end{cases}$
5.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 36, & \text{при } 0 < x \leq 6 \\ 1, & \text{при } x > 6 \end{cases}$
6.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 4, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$
7.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 25, & \text{при } 0 < x \leq 5 \\ 1, & \text{при } x > 5 \end{cases}$
8.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 16, & \text{при } 0 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$
9.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 9, & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$
10.	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 16x^2 / 25, & \text{при } 0 < x \leq 5/4 \\ 1, & \text{при } x > 5/4 \end{cases}$

Образец решения задания № 13

Условие. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 / 4, & \text{при } 0 < x \leq 2. \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти: 1) функцию плотности распределения непрерывной случайной величины X ;

2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X ;

3) построить графики функции распределения и функции плотности распределения случайной величины X .

Решение. 1) Плотность распределения случайной величины X находим как производную функции распределения

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/2, & 0 < x \leq 2. \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

2) Вычислим значения математического ожидания $M(x)$, дисперсии $D(x)$ и среднего квадратического отклонения σ , согласно формулам для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 \Big|_0^2 = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3} = 1,333,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{2^4}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \approx 0,222,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,471.$$

3) Графики функции распределения (см. рис. 23) и функции плотности распределения (см. рис. 24):

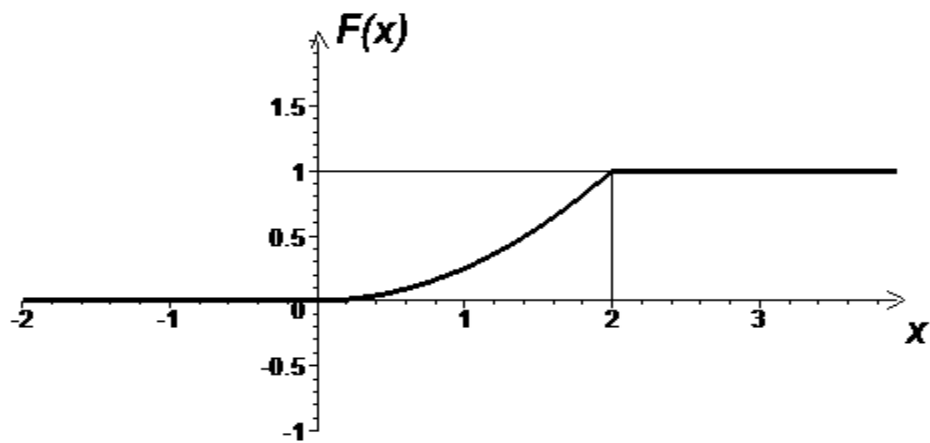


Рис. 23

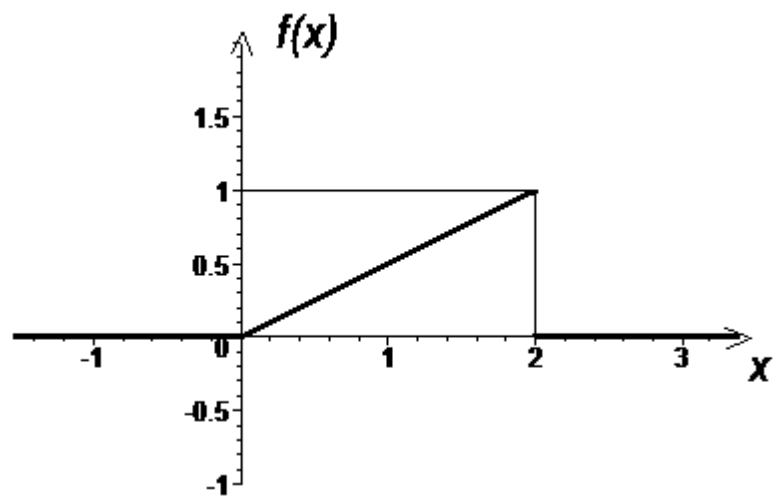


Рис. 24

Ответ. 1)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/2, & 0 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

2) $M(X) = 1,333, \quad D(X) = 0,222, \quad \sigma \approx 0,471.$

5.4.2. Задание № 14

Условие. Заданы математическое ожидание $M(X)$ и средне квадратическое отклонение σ нормально распределённой непрерывной случайной величины X . Найти:

1) вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от своего математического ожидания $X - M(X)$ окажется меньше δ , т.е. $|X - M(X)| < \delta$.

Вариант	$M(X)$	σ	α	β	δ
1.	15	2	16	25	4
2.	13	4	15	17	6
3.	11	3	17	26	12
4.	9	4	15	19	18
5.	7	5	2	22	20
6.	14	4	18	35	8
7.	12	5	17	22	15
8.	10	2	11	13	5
9.	8	2	6	15	8
10.	6	3	0	9	9

Образец решения задания № 14

Условие. Заданы математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределённой случайной величины X . Найти:

1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) ;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - M(X)$ окажется меньше δ , т.е. $|X - M(X)| < \delta$.

Все указанные символы имеют следующие числовые значения:

$$M(X) = 24, \quad \sigma = 19, \quad \alpha = 13, \quad \beta = 23, \quad \delta = 11.$$

Решение. 1) Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что она примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - M(X)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M(X)}{\sigma}\right).$$

Используя данные из условия, найдем

$$\begin{aligned}
P(13 < X < 23) &= \Phi\left(\frac{23-24}{19}\right) - \Phi\left(\frac{13-24}{19}\right) = \\
&= \Phi\left(-\frac{1}{19}\right) - \Phi\left(-\frac{11}{19}\right) = \Phi(-0,0526) - \Phi(-0,5789) = \\
&= -0,0209 + 0,2187 = 0,1978.
\end{aligned}$$

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ есть функция

Лапласа. Ее численные значения представлены в таблице 3 (см Гл. 6. Приложения).

2) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X - M(X)$ окажется меньше δ вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned}
P(|X - M(X)| < \delta) &= P(-\delta < X - M(X) < \delta) = \\
&= P(-\delta + M(X) < X < \delta + M(X)).
\end{aligned}$$

Для вычисления вероятности того, что случайная величина X примет значение из интервала $(-\sigma + M(X); \sigma + M(X))$, подставим в эту формулу условия задачи $M(X) = 24$, $\delta = 11$

$$\begin{aligned}
P(|X - M(X)| < \delta) &= \\
&= P(-11 + 24 < X < 11 + 24) = P(13 < X < 35) = \\
&= P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - M(X)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M(X)}{\sigma}\right) = \\
&= \Phi\left(\frac{35 - 24}{19}\right) - \Phi\left(\frac{13 - 24}{19}\right) = \Phi\left(\frac{11}{19}\right) - \Phi\left(-\frac{11}{19}\right) = \\
&= 2\Phi\left(\frac{11}{19}\right) = 2\Phi(0,5789) = 2 \cdot 0,2187 = 0,4374.
\end{aligned}$$

Ответ. 1) $P(13 < X < 23) = 0,1978$,

$$2) P(|X - M(X)| < \delta) = 0,4374.$$

5.4.3. Задание № 15.

Условие. Дана выборка из генеральной совокупности случайной величины X объема n , указаны начало первого интервала a и шаг h .

1) построить статистическое распределение выборки и гистограмму частот;

2) дать точечные оценки генеральному среднему и дисперсии;

3) предполагая, что выборка сделана из нормальной совокупности, построить доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии нормального распределения, приняв доверительную вероятность $\gamma = 0,95$.

Вариант 1

Дано: выборка объема $n = 104$; начало первого интервала $a = 25$; шаг $h = 4$.

40	51	46	58	63	51	65	55	55	61
50	44	45	57	65	52	60	56	27	45
50	60	44	38	44	59	72	43	69	51
55	53	51	33	53	70	54	62	56	52
65	56	57	55	64	61	52	46	56	65
52	61	52	65	51	57	45	55	58	64
58	47	48	53	72	53	42	41	59	56
28	34	47	26	52	54	60	47	55	48
44	73	59	50	46	41	68	54	47	43
57	71	45	44	72	53	65	33	53	72
58	49	47	31						

Вариант 2

Дано: выборка объема $n = 110$; начало первого интервала $a = 24$; шаг $h = 5$.

52	40	47	55	41	74	45	46	51	76
58	37	40	42	53	54	65	52	46	66
61	55	28	32	65	42	54	56	55	43
60	44	49	77	53	49	25	53	48	73

38	33	72	57	40	54	53	59	34	47
48	26	35	43	55	64	73	75	45	68
73	38	54	57	65	35	45	63	29	68
65	47	59	68	33	44	45	65	56	33
58	49	46	50	36	69	68	57	63	62
35	67	25	65	58	59	42	38	44	42
41	57	68	62	43	36	39	30	35	29

Вариант 3

Дано: выборка объема $n = 123$; начало первого интервала $a = 22$; шаг $h = 6$.

45	65	34	23	67	75	54	37	36	74
57	75	44	47	58	65	38	67	56	65
68	44	48	49	53	59	62	61	74	75
72	36	29	30	63	56	66	64	59	37
49	45	52	51	65	47	66	49	57	59
44	54	35	46	8	49	28	31	43	56
54	55	56	57	29	73	72	62	53	43
66	54	49	63	54	53	50	33	38	70
71	54	45	39	57	58	64	63	66	69
51	50	44	55	59	53	47	49	38	29
30	71	70	56	47	64	63	55	58	53
45	54	56	63	64	58	53	32	38	68
52	62	57							

Вариант 4

Дано: выборка объема $n = 105$; начало первого интервала $a = 20$; шаг $h = 4$.

44	45	30	29	31	32	67	68	69	70
43	56	34	27	65	53	56	70	55	49
43	47	55	50	49	48	35	37	53	51
64	60	55	54	52	59	53	39	69	61
50	55	51	53	43	46	49	55	50	49
48	45	67	62	40	44	48	52	30	56
44	55	50	49	21	52	34	38	41	40
47	53	39	54	51	64	67	60	56	57
43	31	45	59	56	30	70	71	33	41
51	71	63	55	53	57	59	62	39	40
53	59	55	50	37					

Вариант 5

Дано: выборка объема $n = 110$; начало первого интервала $a = 0$; шаг $h = 5$.

1	7	33	15	24	25	36	12	34	11
23	19	24	17	26	22	33	34	39	40
37	27	36	31	29	28	25	14	15	21
20	37	14	15	25	34	22	32	30	25
18	16	17	21	23	18	19	26	25	27
2	11	37	41	9	20	23	24	18	35
32	33	22	24	17	19	20	23	32	33
15	6	8	27	17	29	16	34	5	20
21	28	18	11	30	20	22	18	14	32
25	41	42	24	19	25	20	26	27	33
12	20	17	22	25	24	28	19	21	22

Вариант 6

Дано: выборка объема $n = 120$; начало первого интервала $a = 0$, шаг $h = 6$.

11	12	25	15	7	34	36	24	33	1
40	34	22	17	19	39	33	26	24	23
21	14	28	31	27	15	25	29	36	37
25	32	34	15	37	30	22	25	14	20
27	26	18	21	16	25	19	23	17	18
35	24	20	41	11	18	23	19	37	2
33	23	19	24	33	32	20	17	22	32
20	34	29	27	6	5	16	17	8	15
32	18	20	11	28	14	22	30	18	21
33	26	25	24	41	27	20	19	42	25
22	19	24	22	20	21	28	25	17	12
16	15	31	15	21	41	28	27	18	24

Вариант 7

Дано: выборка объема $n = 116$; начало первого интервала $a = 27$; шаг $h = 5$.

44	45	30	28	31	32	67	68	69	70
64	60	55	54	52	59	53	39	69	61
50	55	51	53	43	46	49	55	50	49

66	54	49	63	54	53	50	33	38	70
71	54	45	39	57	58	64	63	66	69
50	60	44	38	44	59	72	43	69	51
55	53	51	33	53	70	54	62	56	52
44	73	59	50	46	41	68	54	47	43
57	71	45	44	72	53	65	33	53	72
58	49	47	31	70	56	47	49	58	39
30	71	70	56	47	64	63	55	58	53
45	54	56	63	64	58				

Вариант 8

Дано: выборка объема $n = 116$; начало первого интервала $a = 4$; шаг $h = 5$.

32	33	22	24	17	19	20	23	32	33
15	6	8	27	17	29	16	34	5	20
25	41	42	24	19	25	20	26	27	33
12	20	17	22	25	24	28	19	21	22
5	7	33	15	24	25	36	12	34	11
23	19	24	17	26	22	33	34	39	40
21	14	28	31	27	15	25	29	36	37
25	32	34	15	37	30	22	25	14	20
27	26	18	21	16	25	19	23	17	18
32	34	15	37	30	22	25	14	20	15
26	18	21	16	25	19	23	17	18	21
8	18	28	33	43	10				

Вариант 9

Дано: выборка объема $n = 117$; начало первого интервала $a = 1$; шаг $h = 5$.

24	33	7	11	19	32	17	6	7	32
33	34	19	40	29	5	17	23	11	5
20	39	27	21	25	27	19	37	18	27
33	15	37	25	24	21	25	20	23	21
22	30	16	27	25	34	24	18	35	34
11	25	11	35	22	39	26	2	40	39
40	18	33	33	15	36	27	32	13	36
37	32	6	20	30	14	37	15	25	14
20	5	28	32	25	17	16	21	33	17
18	14	41	33	22	20	30	25	19	20

15	27	20	22	19	18	25	12	21	18
21	21	41	37	29	18	13			

Вариант 10

Дано: выборка объема $n = 105$; начало первого интервала $a = 28$; шаг $h = 5$.

49	44	31	30	41	32	65	68	69	71
40	47	55	52	48	49	30	37	52	61
71	34	45	39	56	58	44	63	56	69
64	60	55	54	52	59	53	39	69	61
50	55	51	53	43	46	49	55	50	49
48	45	67	62	40	44	48	52	55	56
44	55	50	49	51	52	34	38	41	40
44	45	30	29	31	32	67	68	69	70
43	56	34	67	65	53	56	70	55	49
43	47	55	50	49	48	35	37	53	51
53	59	55	50	37					

Образец решения задания № 15

Условие. Дана выборка из генеральной совокупности случайной величины X объема n , указаны начало первого интервала a и шаг h .

1) построить статистическое распределение выборки и гистограмму частот;

2) дать точечные оценки генеральному среднему и дисперсии;

3) предполагая, что выборка сделана из нормальной совокупности, построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения, приняв доверительную вероятность $\gamma = 0,95$.

Исходные данные: выборка объема $n = 194$; начало первого интервала $a = 39$; размер шага $h = 6$.

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97

81	71	98	78	85	80	93	64	65	109
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73
99	81	92	76	82	95	75	45	94	81
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69
83	69	90	99	69	85	84	70	80	117
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98
54	62	82	103	91	61	93	68	109	96
84	82	56	78	80	88	66	78	65	50
94	92	89	109	69	58	75	72	101	92
85	76	85	84	68	74	78	87	69	75
58	78	84	62	63	100	55	90	102	70
96	80	75	77	94	91	84	68	86	82
66	89	71	105	89	79	68	81	67	110
95	87	98	84	65	79	76	104	88	72
61	53	66	89						

Решение.

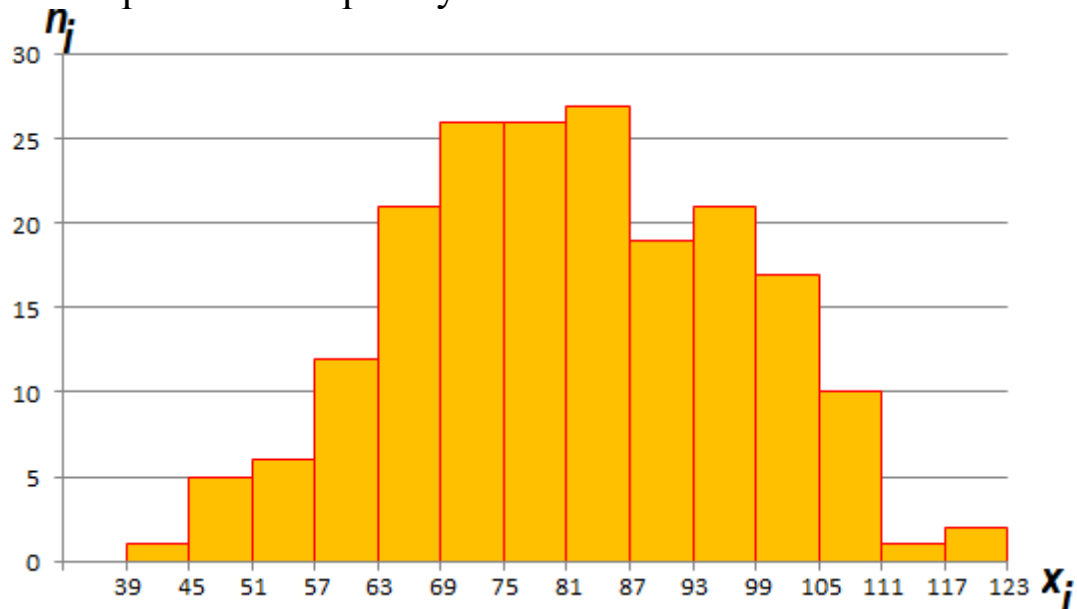
1) Построить статистическое распределение выборки и гистограмму частот.

Выборка объема $n = 194$, начало первого интервала $a = 39$, шаг $h = 6$. Результаты группировки оформим в виде таблицы:

№ Интервала	Интервалы	Середина Интервала c_i	Частоты n_i	$c_i n_i$	$c_i^2 n_i$
1	[39;45)	42	1	42	1764
2	[45;51)	48	5	240	11520
3	[51;57)	54	6	324	17496
4	[57;63)	60	12	720	43200
5	[63;69)	66	21	1386	91476
6	[64;75)	72	26	1872	134784
7	[75;81)	78	26	2028	158184
8	[81; 87)	84	27	2268	190512
9	[87; 93)	90	19	1710	153900
10	[93; 99)	96	21	2016	193536
11	[99; 105)	102	17	1734	176868

12	[105; 111)	108	10	1080	116640
13	[111; 117)	114	1	114	12996
14	[117; 123)	120	2	240	28800
Сумма			194	15774	1331676

Построим гистограмму частот:



2) Дать точечные оценки генеральному среднему и дисперсии.

Выборочная средняя равна

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{14} c_i \cdot n_i = \frac{1}{194} \cdot 15774 = 81,309.$$

Дисперсия – характеризует меру отклонения значений случайной величины от ее среднего значения – равна

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{14} c_i^2 \cdot n_i - (\bar{X})^2 = \frac{1331676}{194} - (81,309)^2 = 253,111.$$

Несмещенная оценка дисперсии – состоятельная оценка дисперсии (исправленная дисперсия) равна

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D = \frac{194}{193} \cdot 253,1105 = 254,422.$$

Оценка среднеквадратического отклонения равна

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{254,422} = 15,951.$$

3) Предполагая, что выборка сделана из нормальной совокупности построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения, приняв доверительную вероятность $\gamma = 0,95$.

Для оценки математического ожидания воспользуемся интервальной формулой

$$\bar{X} - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < M < \bar{X} + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $n = 194$, $\gamma = 0,95$. Используя эти данные, в таблице 1 найдем значение $t_\gamma = 1,96$. При подстановке числовых значений **доверительный интервал** примет вид

$$81,309 - \frac{1,96 \cdot 15,951}{\sqrt{194}} < M < 81,309 + \frac{1,96 \cdot 15,951}{\sqrt{194}} \\ 79,064 < M < 83,554.$$

Следовательно, с вероятностью 95% можно утверждать, что истинное значение математического ожидания будет находиться в интервале $(79,064 ; 83,554)$.

Для оценки среднего квадратического отклонения, воспользуемся, с учетом значения $q_\gamma = q(n; \gamma)$, интервальной формулой

$$s(1 - q_\gamma) < \sigma < s(1 + q_\gamma).$$

Число $q_\gamma = q(n; \gamma)$ вычисляется из таблицы 2 по значениям $n = 194$, $\gamma = 0,95$ и равно $q_\gamma \approx 0,1$. Следовательно,

$$1,685 (1 - 0,1) < \sigma < 1,685 (1 + 0,1) \\ 1,517 < \sigma < 1,854.$$

Ответ. $M \in (79,064 ; 83,554)$, $\sigma \in (1,517; 1,854)$,

$$\bar{X} = 81,309, \quad D = 253,111, \quad S^2 = 254,422, \quad s = 15,951.$$

Глава 6. Приложения

Таблица 1. Таблица значений параметра $t_\gamma = t(n; \gamma)$

n	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$	n	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,46	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,033	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,700	3,558
10	2,26	3,25	4,70	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	3,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,96	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 2. Таблица значений параметра $q_\gamma = q(n; \gamma)$

n	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$	n	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,90	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,09	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 3. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Продолжение таблицы 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Замечание. Для $x > 5$ можно считать $\Phi(x) \approx 0,5$.

Список литературы

1. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике. Учеб. пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 2005. – 304с.
2. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник. – М: ИНФРА – М, 2021.-479с.
3. Соловьев И.А., Шепелев В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. - 288с.
4. Комплексные числа. Понятие функции комплексного переменного: учебное пособие / П.В. Макаров, Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина, В.П. Иванов, Н.В. Семенова – М.: ГУЗ, 2017. – 48с.
5. Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл: учебное пособие / Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина – М.: ГУЗ, 2018. – 70 с.
6. Математический анализ функции одной переменной. Часть II. Производная функции: учебное пособие / Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина – М.: ГУЗ, 2019. – 56 с.
5. Краткий курс математики. Комплексные числа. Кратные и криволинейные интегралы: учебное пособие / Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина – М.: ГУЗ, 2021. – 88с.
9. Дифференциальное исчисление функции двух переменных: учебное пособие / Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина. – М.: ГУЗ, 2022. – 75 с.
10. Математика. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина – М.: ГУЗ, 2023. – 80 с.
11. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2015. — 479 с.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Комплексные числа и действия над ними	3
1.1. Основные определения.....	3
1.2. Формы записи комплексного числа	6
1.3. Действия над комплексными числами.....	10
Глава 2. Дифференциальные уравнения.....	17
2.1. Основные определения.....	17
2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка	20
2.3. Дифференциальные уравнения второго порядка.....	26
Глава 3. Кратные интегралы.....	31
3.1. Двойной интеграл и его применение	31
3.2. Двойной интеграл по прямоугольной области	33
3.3. Двойной интеграл по криволинейной области	35
3.4. Тройной интеграл и его применение	37
3.5. Вычисление тройного интеграла.....	38
Глава 4. Теория вероятностей и математическая статистика.....	41
4.1. Теория вероятностей.....	41
4.1.1. Случайные величины	41
4.1.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин.....	42
4.1.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.....	43
4.2. Математическая статистика	45
4.2.1. Основные определения.....	45
4.2.2. Статистические оценки параметров распределения	46
4.2.3. Интервальные оценки параметров нормального распределения.....	48
Глава 5. Задания для контрольной работы с образцами решений	51
5.1. Задания по теме «Комплексные числа».....	51
5.2. Задания по теме «Дифференциальные уравнения».....	57
5.3. Задания по теме «Кратные интегралы»	65
5.4. Задания по теме «Теория вероятностей и математическая статистика»	70
Глава 6. Приложения.....	84
Список литературы.....	87

Учебное издание

Наталья Анатольевна Кузнецова
Кира Витальевна Курочкина

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 2 -го курса
заочной формы обучения направления подготовки
21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

Издано в авторской редакции

Редакционно-издательский отдел ГУЗ

Подписано в печать . Сдано в производство
Формат 60x84¹/₁₆. Объем -изд.
Бумага офсетная. Тираж 60. Заказ № _____

Отдел оперативной полиграфии ГУЗ
Москва, ул. Казакова, 15