

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Дворникова Татьяна Александровна

Должность: врио проректора по учебной работе

Дата подписания: 28.02.2026 09:01:17

Уникальный программный ключ:

81e4612224154ba92346993825fd4bfa9a28f49d

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Государственный университет по землеустройству»

ФГБОУ
ВО ГУЗ

Подписано цифровой подписью: ФГБОУ ВО ГУЗ
DN: 1.2.643.100.4=120A37373031313133363534,
1.2.643.100.3=120B3032353138393231303430,
1.2.643.100.1=120D3130323737303030323838343
0,
1.2.643.3.131.1.1=120C3737323434383632303639
32, email=t_papaskiri@mail.ru, c=RU, st=77
Москва, l=Москва, street=КАЗАКОВА УЛИЦА, 15,
o=ФГБОУ ВО ГУЗ, cn=ФГБОУ ВО ГУЗ,
title=Временно исполняющий обязанности
ректора, givenName=Тимур Валикович,
sn=Паласкири
Дата: 2023.10.12 10:09:10 +04'00'

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по учебной работе
Н.И. Иванов/
« 2 » сентября 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.06 Математика

(шифр и название дисциплины)

Специальность

21.05.01 Прикладная геодезия

(шифр и название направления подготовки)

специализация

Инженерно-геодезические работы при межевании земель и
ведении кадастра

уровень высшего образования

специалитет

(бакалавриат, специалитет, магистратура)

квалификация

инженер-геодезист

(название)

Москва
2021



1. Разработана на кафедре высшей математики и физики ФГБОУ ВО «ГУЗ» в соответствии со следующими нормативными документами:

– Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденный приказом Минобрнауки России от 05.04.2017 № 301.

– Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - специалитет по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 11 августа 2020 г. № 944.

2. Впервые утверждена и введена в действие на заседании кафедры высшей математики и физики от «01» сентября 2021 г., протокол №1

3. Разработчики рабочей программы:

1.Заведующий кафедрой высшей математики и физики государственного университета по землеустройству, д.т.н. Лыков А.М.

2. Доцент кафедры высшей математики и физики государственного университета по землеустройству, к.ф.-м.н. Кузнецова Н.А.

проверено УМУ

Олексенко О.М.

02.09.2021 г.



1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ЕЕ ОБЪЕМ И МЕСТО В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель учебной дисциплины заключается в получении обучающимися теоретических знаний для базовой математической подготовки бакалавров, позволяющих успешно решать современные прикладные задачи, а также формированию практических навыков и готовности к самостоятельной разработке и их применению в составе команды для решения задач в профессиональной сфере.

Задачи учебной дисциплины:

- 1. формирование понятий об основах математического аппарата, необходимого для решения практических задач;*
- 2. освоение навыков формулировки математических постановок задач, нахождения подходящего метода их решения;*
- 3. получение компетенций по самостоятельному изучению учебной и научной литературы по математике и ее приложениям;*
- 4. формирование умений применять полученные знания в практической деятельности, решать поставленные задачи освоенными аналитическими и численными методами, а также методами математического моделирования с применением вычислительной техники.*

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы приведен в таблице 1.1.



Таблица 1.1 – Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция		Индикаторы компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине), характеризующие этапы формирования компетенций	
Код	Содержание компетенции (или её части)			
ОПК-1	Способен решать производственные и исследовательские задачи профессиональной деятельности на основе фундаментальных знаний в области геодезии	ОПК-1.1 Демонстрирует способность решения задач профессиональной деятельности на основе математических и естественнонаучных знаний	В области знания и понимания (А) - знать	
			Знать	Основы методов математического моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2)
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь	
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2)
			В области практических навыков (С) - владеть навыками	
			Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (С 1)
	ОПК-1.2 Применяет принципиальные особенности математического моделирования объектов, процессов и явлений при решении задач в области геодезии и дистанционного зондирования	ОПК-1.2	В области знания и понимания (А) - знать	
			Знать	Основы методов математического моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2)
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь	
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2)
			В области практических навыков (С) - владеть навыками	
			Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (С 1)
	ОПК – 1.3 Использует математические и естественнонаучные знания для решения задач профессиональной деятельности	ОПК – 1.3	В области знания и понимания (А) - знать	
			Знать	Основы методов математического моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2)
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь	
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1)



Компетенция		Индикаторы компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине), характеризующие этапы формирования компетенций	
Код	Содержание компетенции (или её части)			
				Анализировать результаты решения и применить их на практике (B2)
			В области практических навыков (C) - владеть навыками	
			Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (C 1)

1.2 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Математика» - фундаментальная наука обязательной части (Б1.О.06) дисциплин подготовки студентов по специальности 21.05.01 Прикладная геодезия по профилю подготовки «Инженерно-геодезические работы при межевании земель и ведении кадастра».

Дисциплина изучается на 1-ом и 2-ом курсах в 1, 2, 3, 4 семестрах.

Логическая и содержательная связь дисциплин, участвующих в формировании компетенций, содержится в ниже представленной таблице:

Индикатор компетенции		Предшествующие дисциплины	Данная дисциплина	Последующие дисциплины	
ОПК-1.1		Математика (курс средней школы)	Математика	Информатика, Теоретическая механика, Астрономия, Теория вероятностей и математическая статистика, Физика, Физика Земли и атмосферы, Геодезия, Высшая геодезия, Теория фигур планет и гравиметрия, Фотограмметрия, Аэрокосмические съемки, Общая электротехника и радиоэлектроника, Технология строительства, Дистанционное зондирование и фотограмметрия, Политология, Землеустройство, Кадастр недвижимости, Государственная итоговая аттестация	
ОПК-1.2		Математика (курс средней школы)		Физика, Безопасность жизнедеятельности, Психология и педагогика, Социология, Государственная итоговая аттестация	
ОПК-1.3		Математика (курс		Теория вероятностей и	
← ГУЗ	Выпуск 1		Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 5



	средней школы)		математическая статистика, Астрономия, Математическое моделирование геопространственных данных, Информационные технологии в геодезии, Компьютерные технологии в геодезии, Геодезическая астрономия с основами астрометрии, Основы геодезической астрономии, Теория математической обработки геодезических измерений, Математические методы обработки и анализа геопространственных данных, Государственная итоговая аттестация
--	----------------	--	--

1.3 Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоёмкость дисциплины «Математика» составляет 18 зачётных единиц и 648 академических часа.

Объём дисциплины по видам учебных занятий (в часах)

Объём дисциплины	Всего часов		
	очная форма обучения	заочная формы обучения	очно-заочная форма обучения
Общая трудоёмкость	648		
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий)	326		
Аудиторная работа (всего):	326		
в т. числе:			
Лекции	160		
Семинары, практические	118		
Лабораторные работы	48		
Курсовое проектирование	-		
Самостоятельная работа	214+108		
Вид промежуточной аттестации обучающегося	Экзамен		

2. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Содержание учебной дисциплины

Содержание дисциплины включает следующие разделы и темы:

← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр № 1	Стр. 6
-------	-----------------	--------------------	----------------------	--------



Линейная алгебра и аналитическая геометрия (1)

1.1 Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства. Способы вычисления определителей. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.

1.2 Метод Гаусса. Линейно зависимые и линейно независимые столбцы и строки матрицы. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных алгебраических уравнений.

1.3 Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Общее решение однородной системы уравнений. Базисные и свободные переменные. Структура общего решения неоднородной системы уравнений.

1.4 Линейные векторные пространства. Сложение векторов и умножение вектора на число. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Координаты вектора в выбранном базисе. Длина вектора. Линейные операции в координатах.

1.5 Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований.

1.6 Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрическая интерпретация. Критерии коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов в координатной форме.

1.7 Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости. Различные формы уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

1.8 Кривые второго порядка. Понятие о квадратичных формах от двух переменных. Типы квадратичных форм. Канонические виды кривых второго порядка (эллипсы, гиперболы и параболы).

Элементы дискретной математики и математической логики (2)

1.9 Элементы алгебры логики высказываний. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Основные алгебраические структуры (кольца, поля, группы). Свойства бинарных операций (замкнутость, коммутативность, ассоциативность). Дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность. Законы де Моргана. Ориентированные графы. Полный путь. Основные понятия комбинаторики. Перестановки, размещения и сочетания.

Введение в математический анализ (3)

1.10 Предел функции и его геометрический смысл. Односторонние пределы. Свойства пределов функций. Сравнение бесконечно малых функций. Символика. Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций. Эквивалентные



бесконечно малые функции. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций. Первый и второй замечательные пределы.

1.11 Понятие непрерывности в точке. Определения разрывов первого и второго родов. Устранимые разрывы. Непрерывность элементарных функций. Свойства непрерывных на отрезке функций: ограниченность, достижимость наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений. Асимптоты к графикам функций и способы их нахождения.

Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного (4)

1.12 Производная функции в точке. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Физический смысл первой производной. Непрерывность функции, имеющей производную. Правила нахождения производной суммы, разности, произведения и отношения функций. Таблица производных основных элементарных функций (без вывода).

1.13 Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной параметрически. Производная неявной функции. Первый дифференциал и его геометрический смысл. Дифференциал суммы, разности, произведения и отношения функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциалов в приближённых вычислениях.

1.14 Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. (1 час).

1.15 Теоремы о средних значениях дифференцируемых функций; теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа. Таблица разложений основных элементарных функций по формуле Маклорена.

1.16 Критерий монотонности дифференцируемых функций. Необходимое и достаточное условие экстремума. Критические точки первого рода. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1.17 Определение выпуклости и вогнутости, точек перегиба. Применение второй производной к нахождению интервалов выпуклости и вогнутости. Критические точки второго рода.

1.18 Общая схема исследования функций и построения графиков.

Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы (5)

1.19 Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.



1.20 Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.

1.21 Определение и основные свойства определенного интеграла. Производная по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям.

1.22 Применение определённых интегралов в геометрии и физике. Вычисление площадей плоских областей, длин дуг плоских кривых, поверхностей фигур вращения и объёмов тел вращения. Вычисление центров тяжести и моментов инерции плоских пластин.

1.23 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Основные свойства. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости.

Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных (6)

1.24 Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.

1.25 Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

1.26 Градиент. Производная по направлению. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

1.27 Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия. Условный экстремум.

Числовые и функциональные ряды (7)

1.28 Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости.

1.29 Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения («эталонные» ряды); радикальный признак Коши; признак Даламбера; интегральный признак Коши-Маклорена. Знакопередающиеся ряды: признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

1.30 Знакопередающиеся ряды, признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Даламбера для радиуса сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена..



1.31 Ряды Фурье. Теорема Дирихле. Разложение по синусам и косинусам.

Кратные интегралы. Криволинейные интегралы (8)

1.32 Двойные интегралы и их свойства. Вычисление двойных интегралов повторным интегрированием. Переход к полярным координатам. Геометрические и физические приложения двойного интеграла.

1.33 Тройные интегралы и их свойства. Вычисление тройных интегралов повторным интегрированием. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам. Геометрические и физические приложения тройного интеграла.

1.34 Криволинейные интегралы первого и второго рода, их свойства и вычисление. Формула Грина.

1.35 Поверхностные интегралы первого и второго родов, их свойства и вычисление. Формула Гаусса-Остроградского.

Функции комплексного переменного (9)

1.36 Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Корень n -ой степени из комплексного числа. Основная теорема алгебры. Разложимость многочлена n -ой степени в произведение линейных множителей.

1.37 Функции комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного. Понятие о теореме и формуле Коши.

1.38 Особые точки аналитических функций. Ряды Лорана. Вычеты и их вычисление.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (10)

1.39 Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (О.Д.У.). Частное, общее и особое решения. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Понятие о теореме существования и единственности решения задачи Коши для уравнений первого порядка. Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными.

1.40 Некоторые типы интегрируемых уравнений первого порядка. Линейные уравнения первого порядка. Однородные и сводящиеся к ним типы уравнений первого порядка. Уравнения Бернулли и Эйлера.

1.41 Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях высших порядков. Постановка задачи Коши для О.Д.У. второго порядка. Общее решение О.Д.У. второго порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для О.Д.У. второго порядка. Некоторые частные виды О.Д.У. второго порядка, решаемые в квадратурах. Понижение порядка.

1.42 Общие свойства линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка. Фундаментальная система решений однородного решения. Определитель Вронского. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.



Отыскание частных решений линейных О.Д.У. методом Лагранжа на примере уравнений второго порядка.

1.43 Линейные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного уравнения методом подбора по правой части.

1.44 Нормальные системы О.Д.У. первого порядка. Частные интегралы, интегрируемые комбинации. Линейные системы О.Д.У. первого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Особые точки линейных систем с постоянными коэффициентами на примере системы из двух уравнений. Фазовые траектории. Устойчивость решений линейных систем с постоянными коэффициентами.

Прикладная математика (11)

1.45 Элементарная теория погрешностей.

1.46 Численные методы анализа математических моделей, описываемых уравнениями с одним неизвестным.

1.47 Численные методы анализа математических моделей, описываемых системами линейных алгебраических уравнений.

1.48 Методы одномерной безусловной оптимизации.

1.49 Методы многомерной безусловной оптимизации.

1.50 Метод наименьших квадратов.

1.51 Интерполирование функций.

1.52 Численное интегрирование.

1.53 Численные методы решения задачи Коши.

2.2 Структура учебной дисциплины

Таблица 2.1 – Структура учебной дисциплины для очной формы обучения

Названия содержательных разделов и тем учебной дисциплины	Количество часов					Индика тор компет енции	Признак	
	всего	Очная						
		в том числе						
		лек.	пр.	ла б.	ин д.	СРС		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Линейная алгебра и аналитическая геометрия	48	18	12	4		14	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Элементы дискретной математики и математической логики	15	2	2	2		9	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2; B-1,2, C-1 A-1,2; B-1,2, C-1 A-1,2;B-1,2,C-1
Введение в	54	16	12	6		20	ОПК-1.1,	A-1,2;B-1,2; C-1



Названия содержательных разделов и тем учебной дисциплины	Количество часов					Индика- тор компет енции	Признак	
	всего	Очная						
		в том числе						
		лек.	пр.	ла б.	ин д.	СРС		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
математический анализ							ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Экзамен	27					27		
Итого за 1 семестр:	144	36	26	12		43+27		
Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного	48	16	14	4		14	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Неопределенные, и определенные интегралы. Несобственные интегралы.	40	14	12	2		12	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных.	40	14	10	4		12	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Числовые и функциональные ряды.	25	10	6	2		7	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Экзамен	27					27		
Итого за 2 семестр:	180	54	42	12		45+27		
Кратные интегралы. Криволинейные интегралы.	54	12	8	4		30	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Функции комплексного переменного.	36	8	6	3		19	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Обыкновенные дифференциальные уравнения.	63	16	12	5		30	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Экзамен	27					27		
Итого за 3 семестр:	180	36	26	12		79+27		
Прикладная математика	117	34	24	12		47	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.	A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1 A-1,2;B-1,2; C-1
Экзамен	27					27		



Названия содержательных разделов и тем учебной дисциплины	Количество часов						Инди- ка- тор компет енции	Признак
	Очная							
	всего	в том числе						
		лек.	пр.	ла б.	ин д.	СРС		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Итого за 4 семестр:	144	34	24	12		47+27		
Итого за курс:	648	160	118	48		214+108		

Основными этапами формирования указанных компетенций при изучении студентами дисциплины являются последовательное изучение содержательно связанных между собой разделов (тем) учебных занятий. Изучение каждого раздела (темы) предполагает овладение студентами необходимыми компетенциями. Результат аттестации студента на различных этапах формирования компетенций показывает уровень освоения компетенций студентами.

2.3 Распределение контактной работы

Распределение контактной работы по видам занятий приведено в таблицах 2.3-2.4.

Таблица 2.3 – Лекции, их содержание и объем в часах

Номер темы	Номер лекции	Наименование темы Содержание лекции	Очная ФО	
			Объем	Семест р
1	2	3	4	5
Т.1	Л.1	Определители и их свойства. Матрицы и действия над ними. СЛАУ.	2	1
Т.2	Л.2	Правило Крамера Метод Гаусса. Ранг матрицы.	2	1
Т.3	Л.3	Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.	2	1
Т.4	Л.4	Линейные векторные пространства. Базис. Координаты вектора в выбранном базисе. Длина вектора. Линейные операции в координатах.	2	1
Т.5	Л.5	Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований. Скалярное произведение векторов и его основные свойства.	2	1



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы Содержание лекции	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.6	Л.6	Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрическая интерпретация.	2	1
T.7	Л.7-8	Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные формы уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	4	1
T.8	Л.9	Кривые второго порядка. Канонические виды кривых второго порядка.	2	1
T.9	Л.10	Элементы алгебры логики высказываний. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Основные алгебраические структуры.	2	1
T.10	Л.11-14	Предел функции. Свойства пределов функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций.	8	1
T.11	Л.15-18	Понятие непрерывности в точке. Определения разрывов первого и второго родов. Устранимые разрывы. Непрерывность элементарных функций.	8	1
T.12	Л.1-2	Производная функции в точке. Таблица производных основных элементарных функций.	4	2
T.13	Л.3	Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.	2	2
T.14	Л.4	Производная функции, заданной параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства.	2	2
T.15	Л.5	Правило Лопиталя. Критерии монотонности.	2	2
T.16	Л.6	Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	2	2
T.17	Л.7	Определение выпуклости и вогнутости, точки перегиба	2	2



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы Содержание лекции	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.18	Л.8	Общая схема исследования функций и построения графиков.	2	2
T.19	Л.9-10	Первообразная. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.	4	2
T.20	Л.11	Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Интегрирование некоторых иррациональностей.	2	2
T.21	Л.12	Определение и основные свойства определенного интеграла.	2	2
T.22	Л.13-14	Применение определённых интегралов в геометрии и физике	4	2
T.23	Л.15	Несобственные интегралы.	2	2
T.24	Л.16-17	Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных.	4	2
T.25	Л.18	Полный дифференциал функции нескольких переменных. Градиент. Производная по направлению.	2	2
T.26	Л.19-20	Частные производные и дифференциалы высших порядков.	4	2
T.27	Л.21-22	Экстремумы функции нескольких переменных.	4	2
T.28	Л.23	Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Необходимый признак сходимости.	2	2
T.29	Л.24-25	Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопередающиеся ряды: признак Лейбница.	4	2
T.30	Л.26	Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена.	2	2



<i>Номер темы</i>	<i>Номер лекции</i>	<i>Наименование темы Содержание лекции</i>	<i>Очная ФО</i>	
			<i>Объем</i>	<i>Семестр</i>
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
T.31	Л.27	Ряды Фурье. Теорема Дирихле.	2	2
T.32	Л.1-2	Двойной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление двойного интеграла путем повторного интегрирования. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.	4	3
T.33	Л.3-4	Тройной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление путем повторного интегрирования. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.	4	3
T.34	Л.5	Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение. Вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение. Вычисление. Формула Грина.	2	3
T.35	Л.6	Поверхностные интегралы первого и второго родов, их свойства и вычисление. Формула Гаусса-Остроградского	2	3
T.36	Л.7	Комплексные числа. Арифметические действия над ними. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи.	2	3
T.37	Л.8-9	Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.	4	3
T.38	Л.10	Функции комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного.	2	3
T.39	Л.11	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Понятие о теореме существования и единственности решения задачи Коши.	2	3
T.40	Л.12	Некоторые типы интегрируемых уравнений первого порядка.	2	3
T.41	Л.13	Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях высших порядков.	2	3
T.42	Л.14	Общие свойства линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка.	2	3

Номер темы	Номер лекции	Наименование темы Содержание лекции	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.43	Л.15-16	Линейные уравнения n -ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.	4	3
T.44	Л.17-18	Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Частные интегралы, интегрируемые комбинации.	4	3
T.45	Л.1-2	Элементарная теория погрешностей	4	4
T.46	Л.3-4	Численные методы анализа математических моделей, описываемых уравнениями с одним неизвестным	4	4
T.47	Л.5-6	Численные методы анализа математических моделей, описываемых системами линейных алгебраических уравнений	4	4
T.48	Л.7-8	Методы одномерной безусловной оптимизации	4	4
T.49	Л.9-10	Методы многомерной безусловной оптимизации	4	4
T.50	Л.11-12	Метод наименьших квадратов	4	4
T.51	Л.13-14	Интерполирование функций	4	4
T.52	Л.15	Численное интегрирование	2	4
T.53	Л.16-17	Численные методы решения задачи Коши	4	4
		Общий лекционный объем дисциплины	160	1-4

Таблица 2.4 – Практические (или семинарские) и лабораторные занятия, их содержание и объем в часах



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.1	ПР1	Определители и их свойства. Матрицы и действия над ними. СЛАУ.	2	1
T.2	ПР2	Правило Крамера Метод Гаусса. Ранг матрицы.	2	1
T.3	ПР3	Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.	2	1
T.4	ПР4	Линейные векторные пространства. Базис. Координаты вектора в выбранном базисе. Длина вектора. Линейные операции в координатах.	2	1
T.5	ПР5	Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований. Скалярное произведение векторов и его основные свойства.	2	1
T.6	ПР6	Векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрическая интерпретация.	2	1
T.7	ПР7-8	Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные формы уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	4	1
T.8	ПР9-10	Кривые второго порядка. Канонические виды кривых второго порядка.	4	1
T.9	ПР11	Элементы алгебры логики высказываний. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Основные алгебраические структуры.	2	1
T.10	ПР12-15	Предел функции. Свойства пределов функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций.	8	1
T.11	ПР16-19	Понятие непрерывности в точке. Определения разрывов первого и второго родов. Устранимые разрывы. Непрерывность элементарных функций.	8	1
T.12	ПР1	Производная функции в точке. Таблица производных основных элементарных функций.	2	2



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.13	ПР2-3	Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.	4	2
T.14	ПР4	Производная функции, заданной параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства.	2	2
T.15	ПР5	Правило Лопиталя. Критерии монотонности.	2	2
T.16	ПР6	Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.	2	2
T.17	ПР7	Определение выпуклости и вогнутости, точки перегиба	2	2
T.18	ПР8-9	Общая схема исследования функций и построения графиков.	4	2
T.19	ПР10-11	Первообразная. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.	4	2
T.20	ПР12-13	Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Интегрирование некоторых иррациональностей.	4	2
T.21	ПР14	Определение и основные свойства определенного интеграла.	2	2
T.22	ПР15	Применение определённых интегралов в геометрии и физике	2	2
T.23	ПР16	Несобственные интегралы.	2	2
T.24	ПР17-18	Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных.	4	2
T.25	ПР19	Полный дифференциал функции нескольких переменных. Градиент. Производная по направлению.	2	2



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.26	ПР20-21	Частные производные и дифференциалы высших порядков.	4	2
T.27	ПР22-23	Экстремумы функции нескольких переменных.	4	2
T.28	ПР24	Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Необходимый признак сходимости.	2	2
T.29	ПР25	Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопередающиеся ряды: признак Лейбница.	2	2
T.30	ПР26	Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена.	2	2
T.31	ПР27	Ряды Фурье. Теорема Дирихле.	2	2
T.32	ПР1-2	Двойной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление двойного интеграла путем повторного интегрирования. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.	4	3
T.33	ПР3	Тройной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление путем повторного интегрирования. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.	2	3
T.34	ПР4-5	Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение. Вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение. Вычисление. Формула Грина.	3	3
T.35	ПР5-6	Поверхностные интегралы первого и второго родов, их свойства и вычисление. Формула Гаусса-Остроградского	3	3
T.36	ПР7-8	Комплексные числа. Арифметические действия над ними. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи.	3	3
T.37	ПР8-10	Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.	4	3



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
T.38	ПР10-11	Функции комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного.	2	3
T.39	ПР11-13	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Понятие о теореме существования и единственности решения задачи Коши.	4	3
T.40	ПР13-14	Некоторые типы интегрируемых уравнений первого порядка.	2	3
T.41	ПР14-16	Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях высших порядков.	4	3
T.42	ПР16-17	Общие свойства линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка.	3	3
T.43	ПР18	Линейные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.	2	3
T.44	ПР19	Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Частные интегралы, интегрируемые комбинации.	2	3
T.45	ПР1-2	Элементарная теория погрешностей	4	4
T.46	ПР3-4	Численные методы анализа математических моделей, описываемых уравнениями с одним неизвестным	4	4
T.47	ПР5-6	Численные методы анализа математических моделей, описываемых системами линейных алгебраических уравнений	4	4
T.48	ПР7-8	Методы одномерной безусловной оптимизации	4	4
T.49	ПР9-10	Методы многомерной безусловной оптимизации	4	4
T.50	ПР11-12	Метод наименьших квадратов	4	4



Номер темы	Номер лекции	Наименование темы	Очная ФО	
			Объем	Семестр
1	2	3	4	5
Т.51	ПР13-14	Интерполирование функций	4	4
Т.52	ПР15-16	Численное интегрирование	4	4
Т.53	ПР17-18	Численные методы решения задачи Коши	4	4
		Общий объем	166	1-4

2.3 Распределение самостоятельной работы студентов

Распределение самостоятельной работы студентов ОФО представлено в виде таблицы 2.5.

СРС по дисциплине «Математика» включает выполнение контрольной и расчетно-графической работы, подготовку к текущему контролю и к промежуточной аттестации (экзамен в 1,2, 3 и 4 семестрах).

Таблица 2.5 – График недельной загрузки СРС студента ОФО

1 семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Итого
Подготовка к лекциям		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					10
Подготовка к практическим занятиям			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			11
Работа над индивидуальными заданиями (реферат)			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			11
Подготовка к текущему контролю				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		11
Подготовка к промежуточной аттестации (экзамен)	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
Итого	1	2	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	5	3	2	43+27



2 семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Итого
Подготовка к лекциям		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					10
Подготовка к практическим занятиям			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			11
Работа над индивидуальными заданиями (реферат)			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			11
Подготовка к текущему контролю		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		13
Подготовка промежуточной аттестации (экзамен)	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
Итого	1	3	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	5	3	2	45+27

3 семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Итого
Подготовка к лекциям	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27
Подготовка к практическим занятиям	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
Работа над индивидуальными заданиями (реферат)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17
Подготовка к текущему контролю	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	18
Подготовка промежуточной аттестации (экзамен)	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	28
Итого	5	5	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	79+27

4 семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Итого
Подготовка к лекциям		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					10
Подготовка к практическим занятиям			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		12
Работа над индивидуальными заданиями (реферат)			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		12



Подготовка к текущему контролю		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	
Подготовка промежуточной аттестации (экзамен)	к	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	27	
Итого		1	3	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	5	5	2	47+27

2.4. Распределение интерактивных видов занятий

Очная форма обучения.

Объем интерактивных занятий – 47 часов.

Таблица 2.7 – Распределение интерактивных занятий студента ОФО

Первый семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	4
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	8
Всего	0	1	0	1	1	0	0	2	1	1	2	0	0	0	1	1	0	1	12

Второй семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	8
Всего	0	1	0	1	2	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	11

Третий семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9
Всего	0	1	0	1	1	2	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	12

Четвертый семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9



ие занятия и лабораторн ые работы																			
Всего	0	1	0	1	1	2	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	12

Характеристика интерактивных видов занятий

Интерактивные методы на лекциях:

Мини-лекция, деловая игра, презентация с обсуждением, обратная связь, метод проблемного обучения, творческие задания.

Интерактивные методы на практических занятиях:

Работа в малых группах в компьютерном классе, круглый стол, заседание экспертной группы, форум и дебаты.

Интерактивные методы в самостоятельной работе:

Мозговой штурм, метод проектов, метод обучения в парах (спарринг-партнерство), программа индивидуально-ориентированного развития студента.

3. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Таблица 3.1 – Перечень вопросов и задач для видов контроля

Наименование темы	Перечень вопросов и задач	Формируемые индикаторы компетенции
<i>Входной контроль (проводится на 1-2 неделях 1-го семестра в письменной форме по индивидуальным заданиям)</i>	1. Логарифмы. Определение. Основные свойства. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства. 2. Основы тригонометрии. Основные тригонометрические функции. Формулы приведения. Решение простейших тригонометрических уравнений. 3. Показательные функции. Простейшие уравнения и неравенства.	<i>ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3</i>
<i>Текущий контроль (проводится на всех видах)</i>	Перечень вопросов к текущему контролю: Линейная алгебра и аналитическая геометрия	<i>ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3</i>



занятий и при проверке конспектов лекций, в письменной форме) по всем разделам и темам курса	Матрицы, виды матриц. Действия над матрицами. Определители, их свойства. Минор, алгебраическое дополнение. Вычисления определителей с помощью алгебраических дополнений. Формулы Крамера для решения систем линейных уравнений (СЛУ). Обратная матрица, методы вычисления, матричная форма записи СЛУ, решение СЛУ с помощью обратной матрицы. Ранг матрицы, теорема Кронекера-Капелли. Решение однородных систем линейных уравнений. Метод Гаусса для решения СЛУ (общий случай система n-го порядка). Понятие вектора, проекции вектора на оси координат, направляющие косинусы. Линейные операции над векторами, их основные свойства, коллинеарность, компланарность векторов. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов, его свойства. Векторное произведение векторов, его свойства. Смешанное произведение векторов, его свойства. Расстояние между двумя точками на плоскости. Нахождение площади треугольника, деление отрезка в заданном отношении. Уравнение прямой на плоскости: с угловым коэффициентом; проходящей через данную точку с угловым коэффициентом; проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности	
--	--	--



	прямых на плоскости. Общее уравнение прямой, нормальное уравнение прямой, расстояние от точки до прямой на плоскости. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду, нормирующий множитель (примеры). Общее уравнение плоскости, угол между плоскостями. Нормальное уравнение плоскости, расстояние от точки до плоскости. Общее уравнение прямой в пространстве, канонические уравнения прямой, параметрические уравнения. Угол между прямыми, условия параллельности и Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Понятие о линиях второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Общее уравнение линии второго порядка. Элементы дискретной математики и математической логики Элементы алгебры логики высказываний. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Основные алгебраические структуры (кольца, поля, группы). Свойства бинарных операций (замкнутость, коммутативность, ассоциативность). Дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность. Законы де Моргана. Ориентированные графы. Полный путь. Основные понятия комбинаторики. Перестановки, размещения и сочетания. Введение в математический анализ	
--	---	--



	Предел функции непрерывного аргумента (примеры). Бесконечно большой аргумент. Предел числовой последовательности (примеры). Бесконечно большие, ограниченные, бесконечно малые функции (примеры). Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые. Таблица эквивалентности. Правила предельного перехода: предел суммы, произведения, частного функций. Признак существования предела функции. Первый замечательный предел. Признак существования предела числовой последовательности. Второй замечательный предел. Непрерывность функций, классификация точек разрыва (примеры). Действия над непрерывными функциями. Свойства непрерывных функций. Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного Понятие производной функции, геометрический смысл (примеры). Необходимое условие существования производной (примеры). Теоремы о производных суммы, произведения, частного функций. Производная сложной функции, производная неявной функции, производная обратной функции. Логарифмическая производная. Дифференцирование функций, заданных параметрически (примеры). Таблица производных элементарных функций (доказательство). Дифференцируемость функций,			
← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 28



	необходимое и достаточное условия дифференцируемости функций. Дифференциал функции, дифференциал суммы, произведения, частного, применение дифференциала в приближённых вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема Ролля (без доказательства). Теорема Лагранжа (без доказательства). Теорема Коши (без доказательства). Раскрытие неопределённостей в пределах, правило Лопиталя. Формула Тейлора, формула Маклорена, разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Возрастание и убывание функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функции на отрезке. Экстремальные точки. Достаточные условия экстремума (примеры). Выпуклость и вогнутость кривой. Достаточные условия точек перегиба (примеры). Асимптоты графиков функций (примеры). Исследование функций, построение их графиков (примеры). Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы Первообразная и понятие неопределенного интеграла. Геометрический смысл неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям для	
--	---	--



	неопределенного интеграла. Интегрирование простейших тригонометрических выражений, тригонометрические подстановки. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование выражений, содержащих иррациональность. Понятие определенного интеграла, интегральная сумма. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям, замена переменной в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами, интегралы от разрывных функций. Приложения определенного интеграла. Нахождение площадей, вычисление длины дуги. Нахождение объемов тел вращения, площади поверхности с помощью определенного интеграла. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных Функции нескольких переменных, основные понятия, непрерывность функции. Частные производные и их геометрический смысл. Полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная сложной функции. Неявная функция и ее дифференцирование. Повторное дифференцирование, производные, дифференциалы высших порядков.			
← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 30



	Производная по направлению. Градиент. Свойства градиента. Формула Тейлора для функции двух переменных. Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум функции нескольких переменных, функция Лагранжа. Скалярное поле, поверхности уровня. Числовые и функциональные ряды Определение числового ряда и его суммы, свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Ряды с неотрицательными членами, признаки сравнения. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Знакопередающиеся ряды, признак Лейбница, абсолютная и условная сходимость ряда. Степенные ряды, общие определения. Теорема Абеля, интервал и радиус сходимости ряда. Отыскание радиуса сходимости ряда, примеры. Общие свойства степенных рядов, теоремы о дифференцировании и интегрировании степенных рядов. Разложение элементарных функций в виде степенных рядов, применение степенных рядов в приближённых вычислениях. Ряды Фурье, нахождение коэффициентов рядов Фурье (примеры). Разложение чётных и нечётных функций в ряд Фурье (примеры). Ряды Фурье в произвольном интервале (примеры).	
--	--	--



	Кратные интегралы. Криволинейные интегралы Двойные интегралы: определение, свойства, геометрический смысл, вычисление. Тройные интегралы: определение, свойства, геометрический смысл, вычисление. Криволинейные интегралы 1-го рода: определение, свойства, физический смысл, вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода: определение, свойства, физический смысл, вычисление. Формула Грина. Поверхностные интегралы. Формула Гаусса-Остроградского Функции комплексного переменного Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Корень n-ой степени из комплексного числа. Основная теорема алгебры. Разложимость многочлена n-ой степени в произведение линейных множителей. Функции комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного. Дифференцирование функций комплексного переменного. Понятие о теореме и формуле Коши. Дифференциальные уравнения Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Частное и общее решение. Задача Коши для уравнений первого порядка. Теорема существования и единственности. Интегрирование дифференциальных	
--	---	--



	уравнений с разделяющимися переменными и однородных. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений. Интегрирование дифференциальных уравнений Бернулли. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши для дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема существования и единственности. Некоторые способы решения уравнения высшего порядка с помощью понижения порядка. Фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n-го порядка. Определитель Вронского. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Приемы решения линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Прикладная математика Абсолютная и относительная погрешности. Значащие цифры и верные знаки приближенного числа. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Особенности машинной арифметики. Решение нелинейных уравнений. Теорема о существовании и единственного корня уравнения на отрезке. Способы локализации корней. Интервал неопределенности корня и способ его оценки. Обусловленность задачи о нахождении корня уравнения.	
--	--	--



	Способ определения числа обусловленности корня нелинейного уравнения по отношению к параметру Методы уточнения корней нелинейного уравнения и их вычислительные особенности: скорость сходимости, априорная оценка числа итераций, трудоемкость, критерий окончания итерационного процесса. Методы бисекции, простых итераций и Ньютона. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Норма вектора и норма матрицы. Теоремы об обусловленности решений СЛАУ. Прямые методы решения СЛАУ и их вычислительные особенности. Метод наименьших квадратов (МНК). Варианты постановок задач об обработке экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Вывод системы нормальных уравнений. Линеаризация нелинейных зависимостей целью использования линейного МНК. Постановка задачи интерполяции. Теорема о существовании и единственности интерполяционного полинома. Полином Лагранжа. Численное интегрирование. Простые и составные формулы численного интегрирования. Погрешность усечения и вычислительная погрешность. Полная погрешность. Порядок точности метода. Оптимальный шаг интегрирования. Правило Рунге и численный критерий его применимости. Автоматический выбор шага интегрирования. Численное дифференцирование. Формулы	
--	---	--



	численного дифференцирования: левая, правая и центральные разностные производные первого порядка. Вторая разностная производная. Погрешность усечения и вычислительная погрешность. Полная погрешность. Порядок точности формулы численного дифференцирования. Оптимальный шаг численного дифференцирования.																					
Линейная алгебра и аналитическая геометрия	1) Вычислить: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 2</td><td>2) 0</td><td>3) 1</td><td>4) -1</td><td>5) -2</td></tr></table> 2) Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ Варианты ответов: <table><tr><td>1) 2</td><td>2) -3</td><td>3) 0</td><td>4) 3</td><td>5) -2</td></tr></table> 3) Решить СЛАУ: $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases}$ Варианты ответов: <table><tr><td>1) (0;1;1)</td><td>2) (-1;1;2)</td><td>3) (-2;1;-1)</td><td>4) (1;1;1)</td><td>5) (3;-1;2)</td></tr></table> 4) При каких значениях A и B прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+1}{3}$ перпендикулярна плоскости $Ax + By + 6z - 7 = 0$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 0;2</td><td>2) -4;2</td><td>3) 4;-8</td><td>4) 4;5</td><td>5) -2;-1</td></tr></table> 5) Найти проекцию $M(-6;4)$ на прямую $l: 4x - 5y + 3 = 0$. Варианты ответов:	1) 2	2) 0	3) 1	4) -1	5) -2	1) 2	2) -3	3) 0	4) 3	5) -2	1) (0;1;1)	2) (-1;1;2)	3) (-2;1;-1)	4) (1;1;1)	5) (3;-1;2)	1) 0;2	2) -4;2	3) 4;-8	4) 4;5	5) -2;-1	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3
1) 2	2) 0	3) 1	4) -1	5) -2																		
1) 2	2) -3	3) 0	4) 3	5) -2																		
1) (0;1;1)	2) (-1;1;2)	3) (-2;1;-1)	4) (1;1;1)	5) (3;-1;2)																		
1) 0;2	2) -4;2	3) 4;-8	4) 4;5	5) -2;-1																		
← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 35																		



	<table> <tr> <td>1) (1;3)</td> <td>2) (-2;-1)</td> <td>3) (-2;1)</td> <td>4) (-1;-1)</td> <td>5) (3;-2)</td> </tr> </table> 6) Найти площадь треугольника, если известны координаты его вершин $A(2;0)$, $B(5;3)$, $C(2;6)$. Варианты ответов: <table> <tr> <td>1) 10</td> <td>2) 7</td> <td>3) 9</td> <td>4) 5</td> <td>5) 11</td> </tr> </table> 7) Найти скалярное произведение $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, если $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = 2$, $\vec{a} \perp \vec{b}$. Варианты ответов: <table> <tr> <td>1) 11</td> <td>2) 25</td> <td>3) 15</td> <td>4) 17</td> <td>5) 13</td> </tr> </table> 8) Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 28$. Варианты ответов: <table> <tr> <td>1) (2;3;2)</td> <td>2) (-1;-3;-2)</td> <td>3) (-2;1;5)</td> <td>4) (2;4;-6)</td> <td>5) (3;-5)</td> </tr> </table>	1) (1;3)	2) (-2;-1)	3) (-2;1)	4) (-1;-1)	5) (3;-2)	1) 10	2) 7	3) 9	4) 5	5) 11	1) 11	2) 25	3) 15	4) 17	5) 13	1) (2;3;2)	2) (-1;-3;-2)	3) (-2;1;5)	4) (2;4;-6)	5) (3;-5)	
1) (1;3)	2) (-2;-1)	3) (-2;1)	4) (-1;-1)	5) (3;-2)																		
1) 10	2) 7	3) 9	4) 5	5) 11																		
1) 11	2) 25	3) 15	4) 17	5) 13																		
1) (2;3;2)	2) (-1;-3;-2)	3) (-2;1;5)	4) (2;4;-6)	5) (3;-5)																		
Элементы дискретной математики и математической логики	1. Предложение: «Кто такой Л. Толстой?» является: а) высказыванием; б) предикатом; в) квантором; г) все вышеперечисленные варианты не подходят 2. Высказывания, содержащее связи и, или, не, если...то, только если, тогда и только тогда, называется: а) простым; б) сложным; в) булевой алгеброй; г) все вышеперечисленное 3. Высказывание – это а) утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно; б) операция, заданная на некотором множестве; в) правило теории множеств;	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3																				
← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 36																		



	г) любое утверждение или предложение, содержащее вопрос.											
Введение в математический анализ	1) Найдите: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - x - 6}$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1/2</td><td>2) 2/3</td><td>3) 5/6</td><td>4) 5/7</td><td>5) 8/9</td></tr></table>	1) 1/2	2) 2/3	3) 5/6	4) 5/7	5) 8/9	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3					
	1) 1/2	2) 2/3	3) 5/6	4) 5/7	5) 8/9							
	2) Найдите: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\arcsin x^2}$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) -1/2</td><td>2) -2/3</td><td>3) 1/6</td><td>4) -2/7</td><td>5) 1/5</td></tr></table>	1) -1/2	2) -2/3	3) 1/6	4) -2/7	5) 1/5						
	1) -1/2	2) -2/3	3) 1/6	4) -2/7	5) 1/5							
	3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, найдите $f'(-8)$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 0</td><td>2) 1/3</td><td>3) -1/3</td><td>4) 1</td><td>5) -1</td></tr></table>	1) 0	2) 1/3	3) -1/3	4) 1	5) -1						
	1) 0	2) 1/3	3) -1/3	4) 1	5) -1							
	4) $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$, найдите $f'(1)$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) $1/\sqrt{5}$</td><td>2) $1/\sqrt{3}$</td><td>3) 1</td><td>4) 1/2</td><td>5) 1/</td></tr></table>	1) $1/\sqrt{5}$	2) $1/\sqrt{3}$	3) 1	4) 1/2	5) 1/						
	1) $1/\sqrt{5}$	2) $1/\sqrt{3}$	3) 1	4) 1/2	5) 1/							
	5) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x}\right)$, найдите $f'(5)$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1/7</td><td>2) 1/12</td><td>3) 1/15</td><td>4) 1/2</td><td>5) 1/3</td></tr></table>	1) 1/7	2) 1/12	3) 1/15	4) 1/2	5) 1/3						
	1) 1/7	2) 1/12	3) 1/15	4) 1/2	5) 1/3							
6) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2 + 4x + 5$ на отрезке $[-3; 3]$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1; 26</td><td>2) 5; 12</td><td>3) 7; 32</td><td>4) 1/2; 17</td><td>5) 36</td></tr></table>	1) 1; 26	2) 5; 12	3) 7; 32	4) 1/2; 17	5) 36							
1) 1; 26	2) 5; 12	3) 7; 32	4) 1/2; 17	5) 36								
7) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 4]$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1</td><td>2) 2</td><td>3) 3</td><td>4) 4</td><td>5) 5</td></tr></table>	1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5							
1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5								
8) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 4]$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1</td><td>2) 2</td><td>3) 3</td><td>4) 4</td><td>5) 5</td></tr></table>	1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5							
1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5								
9) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 4]$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1</td><td>2) 2</td><td>3) 3</td><td>4) 4</td><td>5) 5</td></tr></table>	1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5							
1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5								
10) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 4]$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1</td><td>2) 2</td><td>3) 3</td><td>4) 4</td><td>5) 5</td></tr></table>	1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5							
1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5								
Дифференциальное исчисление функций одного переменного	1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, найдите $f'(-8)$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 0</td><td>2) 1/3</td><td>3) -1/3</td><td>4) 1</td><td>5) -1</td></tr></table> 2) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 4]$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1</td><td>2) 2</td><td>3) 3</td><td>4) 4</td><td>5) 5</td></tr></table>	1) 0	2) 1/3	3) -1/3	4) 1	5) -1	1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3
1) 0	2) 1/3	3) -1/3	4) 1	5) -1								
1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 5								



	</
--	--



Числовые и функциональные ряды	1)Можно ли использовать признак Даламбера для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$. Выяснить сходится ли ряд? Варианты ответов: <table><tr><td>1) нельзя, ряд сходится</td><td>2) можно, ряд сходится</td><td>3) нельзя, ряд расходится</td><td>4) можно, ряд расходится</td></tr></table> 2)Выяснить, сходится ли разность двух расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$. Если да, то найти сумму получившегося ряда. Варианты ответов: <table><tr><td>1) да, 1/3</td><td>2) да, 1/2</td><td>3) да, 1</td><td>4) да, 2</td><td>5) нет</td></tr></table> 3)Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ при $x = \frac{1}{2}$. Варианты ответов: <table><tr><td>1) 1</td><td>2) 2</td><td>3) 3</td><td>4) 4</td><td>5) 1/4</td></tr></table>	1) нельзя, ряд сходится	2) можно, ряд сходится	3) нельзя, ряд расходится	4) можно, ряд расходится	1) да, 1/3	2) да, 1/2	3) да, 1	4) да, 2	5) нет	1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 1/4	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3
1) нельзя, ряд сходится	2) можно, ряд сходится	3) нельзя, ряд расходится	4) можно, ряд расходится													
1) да, 1/3	2) да, 1/2	3) да, 1	4) да, 2	5) нет												
1) 1	2) 2	3) 3	4) 4	5) 1/4												
Кратные и криволинейные интегралы	1. Какое значение имеет интеграл $\iint_{\Omega} dx dy$, где $\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1, x + y \leq 2\}$: 1) 1; 2) 1.5; 3) 2; 4) 2,5 2. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле: $S = \iint_D \rho(x, y) dx dy$ 1) $S = \iint_D f(x, y) dx dy$ 2) $S = \iint_D \rho(x, y) dx dy$	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3														
← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 39												



	$3) S = \iint_D f(x)dx$ $4) S = \iint_D dx dy$	
Обыкновенные дифференциальные уравнения	1. Какой тип уравнений имеет следующую форму записи: $y' = f(x, y)$? 1) с разделяющимися переменными; 2) однородное; 3) в полных дифференциалах. 2. Определить тип уравнения: $y' + y = 0$: 1) Бернулли; 2). с разделяющимися переменными; 3) линейное. 3. Решить задачу Коши: $y'' + 3y' + 2y = e-x, y(0) = -1, y'(0) = 1$ 1) $y = e-2x + e-x + xe-x$ 2) $y = e-2x - 2e-x + xe-x$ 3) $y = e2x + e-x - xe-x$ 4) $y = e2x - e-x + xe-x$	ОПК-1.1; ОПК-1.2; ОПК-1.3

Таблица 3.2 - Методические указания к изучению теоретических вопросов и решению типовых задач, используемые при изучении дисциплины

№ п/п	Наименование указаний, пособий
1	Щипачев В.С. Высшая математика (учебник). М.: Высшая школа. 2001.
2	Соловьёв И.А., Шевелёв В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике, Части 1 – 3, Лань. 2007 -2009.
3	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1и 2. «Интеграл-пресс». 2006.
4	Иванов Б.Н. Дискретная математика. М.: Физ.-мат.-лит. 2007
5	Элементы теории множеств и математической логики. Кузнецова Н.А., Червяков А.В., Хасанов А.А. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2019,- 46с



№ n/n	Наименование указаний, пособий
6	Математический анализ функции одной переменной. Часть I. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2019. - 69 с.
7	Математический анализ функции одной переменной. Часть II. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2019. - 61 с.
8	Интегральное исчисление. Приложение определенного интеграла. Часть III. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2020. - 62 с.

3.1. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение обучающимся учебной дисциплины «Математика» предполагает изучение материалов дисциплины на аудиторных занятиях и в ходе самостоятельной работы. Аудиторные занятия проходят в форме лекций, семинаров и лабораторных работ. Самостоятельная работа включает разнообразный комплекс видов и форм работы обучающихся. Самостоятельная работа студентов подразумевает работу под руководством преподавателей (консультация и помощь при выполнении расчетно- графических работ), и индивидуальную работу студентов в компьютерном классе или библиотеке университета.

При проведении занятий рекомендуется использование активных и интерактивных форм занятий в сочетании с внеаудиторной работой. Для усвоения закрепленных компетенций рекомендуется использование изученного материала при проведении занятий по «Физике», «Геодезии».

Самостоятельная работа студентов (СРС) позволяет предметно выработать аналитические навыки, обеспечить понимание основ математической теории и практики применения математического аппарата к решению практических задач, более осознанно относиться к уровню своей профессиональной подготовки. СРС способствует развитию их мыслительной деятельности, обеспечивает усвоение определенного учебного материала и предоставляет необходимую подготовку для решения конкретных практических задач, входящих в их будущие профессиональные обязанности. СРС направлена на обеспечение индивидуализации при изучении курса, на развитие способностей и возможностей, на персонализацию контроля за качеством обучения.

При подготовке к практическим занятиям, руководствуясь планом и списком рекомендуемой литературы, необходимо изучить тему так, чтобы по



каждому из предложенных вопросов студент мог дать развернутый, обстоятельный ответ.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов включает:

- Работа над конспектом лекции
- Подготовка к практическому занятию по материалам лекций и учебной литературы.
- Выполнение практических и домашних заданий
- Подготовка к практическому занятию с ИАМ
- Доработка конспекта лекции с применением учебника, методической литературы, дополнительной литературы
- Подбор, изучение, анализ и конспектирование рекомендованной литературы
- Самостоятельное изучение отдельных тем, параграфов
- Подготовка к экзамену.

Для успешного освоения учебной дисциплины и достижения поставленных целей необходимо внимательно ознакомиться с настоящей рабочей программой учебной дисциплины. Ее может представить преподаватель на вводной лекции или самостоятельно обучающийся использует информацию на официальном Интернет-сайте Университета.

Следует обратить внимание на список основной и дополнительной литературы, которая имеется в электронной библиотечной системе Университета, на предлагаемые преподавателем ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет. Эта информация необходима для самостоятельной работы обучающегося.

Алгоритм деятельности преподавателя и студентов

Этапы деятельности	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студент
Подготовка: <i>определение темы, цели и задач задания</i>	<i>Мотивирует, помогает студенту в постановке коммуникативных задач</i>	<i>Определяет и обсуждает с преподавателем актуальность проблемы; выдвигает совместно с преподавателем гипотезу исследования</i>
Планирование: – <i>определение источников, способов сбора, анализа информации, способов представления результатов;</i> – <i>установление</i>	<i>Корректирует в случае необходимости деятельность студента, предлагает идеи, высказывает предположения</i>	<i>Формулирует задачи и разрабатывает план действий; обсуждает с преподавателем методы исследования</i>



Этапы деятельности	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студент
<i>критериев оценки результата и процесса</i>		
Сбор информации: <i>наблюдение, работа со справочной литературой, учебной, научной и др.</i>	<i>Наблюдает за деятельностью студента, косвенно руководит его исследовательской деятельностью</i>	<i>Собирает и систематизирует информацию по теме (задаче)</i>
Анализ информации, формулирование выводов	<i>Корректирует деятельность студента, наблюдает, советует</i>	<i>Анализирует собранную информацию, решает поставленную задачу</i>
Оформление работы, подготовка к представлению результатов	<i>Консультирует в оформлении расчетно- графической работы</i>	<i>Оформляет решение и конечные результаты</i>
Представление задания	<i>Оценивает результаты решения задач по заранее установленным критериям</i>	<i>Представляет решенные задания, проходит процедуру защиты расчетно-графического задания.</i>
Подведение итогов, рефлексия и оценка	<i>Оценивает усилия, использованные и неиспользованные возможности, творческий подход студента.</i>	<i>Участствует в коллективном обсуждении, определяет возможности для продолжения исследования</i>

Методические рекомендации при работе над конспектом лекций

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.



Методические рекомендации студентам по самостоятельной работе над изучаемым материалом и при подготовке к практическим занятиям

Планы практических занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.

Прежде чем приступить к изучению темы, необходимо прокомментировать основные вопросы плана семинара. Такой подход преподавателя помогает студентам быстро находить нужный материал к каждому из вопросов, не задерживаясь на второстепенном.

Подготовка к практическому занятию включает 2 этапа:

1-й – организационный;

2-й - закрепление и углубление теоретических знаний.

На первом этапе студент планирует свою самостоятельную работу, которая включает:

- уяснение задания на самостоятельную работу;

- подбор рекомендованной литературы;

- составление плана работы, в котором определяются основные пункты предстоящей подготовки.

Составление плана дисциплинирует и повышает организованность в работе.

Второй этап включает непосредственную подготовку студента к занятию. Начинать надо с изучения рекомендованной литературы. Необходимо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной работы. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы студент должен стремиться понять и запомнить основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале.

Заканчивать подготовку следует составлением плана (конспекта) по изучаемому материалу (вопросу). Это позволяет составить концентрированное, сжатое представление по изучаемым вопросам.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

При необходимости следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.



В начале занятия студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия, раскрывают и объясняют основные положения публичного выступления. В процессе творческого обсуждения и дискуссии вырабатываются умения и навыки использовать приобретенные знания для различного рода ораторской деятельности.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студентов. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику и тем самым проникнуть в творческую лабораторию автора.

Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятельной работе.

Важно развивать у студентов умение сопоставлять источники, продумывать изучаемый материал.

Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирования у студентов.

Преподаватель может рекомендовать студентам следующие основные формы записи: план (простой и развернутый), выписки, тезисы.

Результаты конспектирования могут быть представлены в различных формах.

План – это схема прочитанного материала, краткий (или подробный) перечень вопросов, отражающих структуру и последовательность материала. Подробно составленный план вполне заменяет конспект.

Конспект – это систематизированное, логичное изложение материала источника. Различаются четыре типа конспектов:

- План-конспект – это развернутый детализированный план, в котором достаточно подробные записи приводятся по тем пунктам плана, которые нуждаются в пояснении.
- Текстуальный конспект – это воспроизведение наиболее важных положений и фактов источника.
- Свободный конспект – это четко и кратко сформулированные (изложенные) основные положения в результате глубокого осмысливания материала. В нем могут присутствовать выписки, цитаты, тезисы; часть материала может быть представлена планом.
- Тематический конспект – составляется на основе изучения ряда источников и дает более или менее исчерпывающий ответ по какой-то схеме (вопросу).

Ввиду трудоемкости подготовки к практическим занятиям преподавателю следует предложить студентам алгоритм действий,



рекомендовать еще раз внимательно прочитать записи лекций и уже готовый конспект по теме занятия, тщательно продумать свое устное выступление.

Самостоятельная работа способствует сознательному усвоению, углублению и расширению теоретических знаний; формируются необходимые профессиональные умения и навыки и совершенствуются имеющиеся; происходит более глубокое осмысление методов научного познания конкретной науки, овладение необходимыми умениями творческого познания.

Основными формами самостоятельной работы являются:

- конспектирование лекций и прочитанного источника;
- проработка материалов прослушанной лекции;
- самостоятельное изучение программных вопросов, указанных преподавателем на лекциях и выполнение домашних заданий;
- формулирование тезисов;
- составление аннотаций и написание рецензий;
- обзор и обобщение литературы по интересующему вопросу;
- изучение научной литературы;
- подготовка к семинарским занятиям, зачетам и экзаменам.

Рекомендации по оцениванию устных ответов студентов на семинарских занятиях и выполнению практических заданий.

С целью контроля и подготовки студентов к изучению новой темы в начале каждого практического занятия преподавателем проводится индивидуальный или фронтальный устный опрос по выполненным заданиям предыдущей темы.

Критерии оценки:

- правильность ответа по содержанию задания (учитывается количество и характер ошибок при ответе);
- полнота и глубина ответа (учитывается количество усвоенных фактов, понятий и т.п.);
- сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала);
- логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией);
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели);
- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе);
- использование дополнительного материала (обязательное условие);



– рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов).

Оценка «5» ставится, если студент:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

Оценка «4» ставится, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

Оценка «3» ставится, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

Оценка «2» ставится, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Методические рекомендации по подготовке к экзаменам

Задачи:

1. Оценить навыки и умения грамотно и убедительно излагать изученный учебный материал.
2. Оценить умение студентов ориентироваться в основной и дополнительной учебной математической литературе.
3. Закрепить умение студентов анализировать математические модели прикладных и ориентировано направленных профессиональных задач, уметь оценивать их результат.

Критерии оценки знаний

Учитывается текущая успеваемость, посещаемость занятий, выполнение заданий для самостоятельной работы, защита расчетно-графических работ, сдача тестовых занятий и т.д.

Результаты экзамена оцениваются:



«отлично» знание основных понятий предмета;

- умение использовать и применять полученные знания на практике;
- работа на практических занятиях;
- знание основных научных теорий, изучаемых предметов;
- ответ на вопросы билета.

«хорошо» - знание основных понятий предмета;

- умение использовать и применять полученные знания на практике;
- работа на практических занятиях;
- знание основных научных теорий, изучаемых предметов;
- ответ на вопросы билета.
- неправильно решено практическое задание

«удовлетворительно» - демонстрирует частичные знания по темам дисциплин;

- незнание, неумение использовать и применять полученные знания на практике;
- не работал на практических занятиях;

«неудовлетворительно» - демонстрирует частичные знания по темам дисциплин;

- незнание основных понятий предмета;
- неумение использовать и применять полученные знания на практике;
- не работал на практических занятиях;
- не отвечает на вопросы.

Оценка выставляется в экзаменационной ведомости.

Методические рекомендации по подготовке к контрольным расчетно-графическим работам

Контрольная (КР) работа проводится после изучения каждого раздела (темы) дисциплины.

Контрольная работа, как правило, является индивидуальной для каждого студента и состоит из решения практической задачи. Контрольная работа проводится на практическом занятии.

Оценка КР выставляется в журнал учебных занятий и учитывается при аттестации студентов в период зачётной экзаменационной сессии (сокращение числа экзаменационных вопросов при оценке КР не ниже «хорошо», предоставление права студенту выбора экзаменационных вопросов из предложенных преподавателем и других преференций).

Критерии оценки

Оценка «отлично» выставляется студенту, если практическая задача решена полностью с соответствующими математическим выкладками,



обоснованиями или устными ответам на возникшие у преподавателя вопросы.

Оценка «хорошо» - выставляется студенту, если практическая задача решена полностью без подробных выкладок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача решена не полностью.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача не решена.

Оценка выставляется в журнале посещаемости студентов.

Текущий и итоговый контроль успеваемости по дисциплине

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения образовательной программы в рамках учебной дисциплины

3.2. Задания на самостоятельную работу

Задания для самостоятельной работы по 1 семестру

Цель: изучить основные понятия и теоремы линейной алгебры и аналитической геометрии, элементы дискретной математики и математической логики, введение в математический анализ.

Содержание:

- 1.Выполнение расчетно-графических заданий, подготовка к тестированию и контрольной работе.
- 2.Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.
3. Подготовка к экзамену.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление.
3. Выполненные задания.
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ: (

линейная алгебра и аналитическая геометрия, № №1-6;

введение в математический анализ, №№ 7,8;

Задания и образцы решений даны в учебнике 3(раздел 5).

Вопросы: прорабатываются вопросы из раздела 3.4.

Отчетность: конспект лекций, контрольная работа (или тестирование), защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: пятибалльная.

Источники: обязательные и дополнительные



Задания для самостоятельной работы по 2 семестру

Цель: изучить: дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного; основные понятия, методы вычисления и применение неопределенных, определенных и несобственных интегралов; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; числовые и функциональные ряды.

Содержание:

- 1.Выполнение расчетно-графических работ, подготовка к тестированию и контрольной работе.
- 2.Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.
- 3.Подготовка к экзамену.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление
3. Выполненные задания
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ:

Дифференциальное исчисление функций одной переменной, №№9-15;

Неопределенные, определенные, несобственные интегралы, №№1-7;

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, №№8-13;

Числовые и функциональные ряды, №№14-21.

Задания и образцы решений даны в учебниках 1,2 (раздел 5).

Вопросы: прорабатываются вопросы из раздела 3.4

Отчетность: конспект лекций, защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: зачет

Источники: обязательные и дополнительные

Задания для самостоятельной работы по 3 семестру

Цель: изучить основные понятия, методы вычисления и применение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов; комплексные числа и операции с ними; решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Содержание:

- 1.Выполнение расчетно-графических работ, подготовка к тестированию и контрольной работе.
- 2.Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.



3. Подготовка к экзамену.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление.
3. Выполненные задания.
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ:

Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы, №№1-5;

Функции комплексного переменного, №№1-7;

Обыкновенные дифференциальные уравнения, №№8-13.

Задания и образцы решений даны в учебнике 3(раздел 5)

Вопросы: прорабатываются вопросы из раздела 3.4

Отчетность: конспект лекций, защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: пятибалльная.

Источники: обязательные и дополнительные

Задания для самостоятельной работы по 4 семестру

Цель: изучить теорию погрешностей, методы бисекции, простых итераций, Ньютона, наименьших квадратов и возможности их применения.

Содержание:

1. Выполнение расчетно-графических работ, подготовка к тестированию и контрольной работе.

2. Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.

3. Подготовка к экзамену.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление.
3. Выполненные задания.
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ:

Теорию погрешностей, №№1-2;

Численные методы анализа математических моделей, №№3-4;



Методы оптимизации, №№5;

Метод наименьших квадратов, №№6;

Численное интегрирование и интерполирование, №№7-8.

Задания и образцы решений даны учебнике 4(раздел 5)

Вопросы: прорабатываются вопросы из раздела 3.4

Отчетность: конспект лекций, защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: пятибалльная.

Источники: обязательные и дополнительные

3.3. Оценка самостоятельной работы студентов специалитета (СРС)

Контроль самостоятельной работы (КСР) – вид контактной внеаудиторной работы обучающихся по образовательной программе. КСР осуществляется преподавателем по результатам отчетов студентов. Оценка КСР выставляется по пятибалльной системе в отдельную ведомость и учитывается при аттестации студентов по дисциплине в период зачётно-экзаменационной сессии.

3.4. Задания для самостоятельной работы

Вопросы, требующие самостоятельной проработки и примеры тестов для их выполнения приведены в таблице 3.1. Расчетно-графические и другие задания приведены в п. 3.2.

3.5. Типовые задачи и их решение

Проверяемые компетенции:

Код и наименование общепрофессиональной компетенции	Код и наименование индикатора достижения общепрофессиональной компетенции
ОПК-1. <i>Способен решать производственные и (или) исследовательские задачи профессиональной деятельности на основе фундаментальных знаний в области геодезии</i>	ОПК-1.1 - Демонстрирует способность решения задач профессиональной деятельности на основе математических и естественнонаучных знаний;
	ОПК-1.2 - Применяет принципиальные особенности математического моделирования объектов, процессов и явлений при решении задач в области геодезии и дистанционного зондирования;
	ОПК – 1.3 Использует математические и естественнонаучные знания для решения задач профессиональной деятельности

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Найти матрицу $C = 2A + B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$



Решение. В соответствии с определением линейных операций над матрицами и их свойствами имеем:

$$C = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ -3 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Можно было решить эту задачу следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^3$.

Решение. Исходя из определения степени матрицы с натуральным показателем, имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 30 \\ -45 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A : $f(x) = x^2 - 5x$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2) & (1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3) \\ (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) & (2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5 & -4+5 \\ 8-10 & 7-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}$.

Решение. Замечаем, что второй столбец определителя уже содержит один нулевой элемент. Прибавим к элементам второй строки элементы первой строки, умноженные на -1 , а к элементам четвертой строки — элементы первой строки, умноженные на 5 . Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ (-3-3) & (1-1) & (-1+4) & (-2-5) \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ (15+3) & (-5-5) & (4-5) & (-4+10) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 18 & -10 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по второй строке, имеем:



$$\Delta = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 18 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

(Затем мы вынесли сомножитель 2 первого столбца на основании свойства 4). Далее прибавим к элементам первого и второго столбца элементы третьего столбца определителя. Получим:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} -10 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 15 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Здесь мы вынесли множитель в первом столбце, а затем общий множитель (-1) в первой строке. Разлагая теперь получившийся определитель третьего порядка по элементам второй строки, получим:

$$\Delta = 10 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot (10 - 6) = 40.$$

Здесь определитель второго порядка вычислен в соответствии с его определением, по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

1. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Прежде всего вычисляем определитель данной матрицы, чтобы убедиться в существовании обратной матрицы. Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Здесь мы прибавили к элементам второй строки элементы третьей строки, умноженные предварительно на (-1) , а затем раскрыли определитель по второй строке. Так как определитель данной матрицы отличен от нуля, то обратная к ней матрица существует. Для построения присоединенной матрицы находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы. Имеем

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 13, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (1.15) транспонируем матрицу A^* :



$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 13 & -4 & -1 \end{pmatrix}, (A^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 13 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (1.15) имеем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 & 13/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 1, \\ 7x_1 + 8x_2 + 18x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 17x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Определим ранги основной A и расширенной $\tilde{A}$ матриц системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 7 & 8 & 18 & 2 \\ 3 & 7 & 17 & 3 \end{array} \right).$$

Начнем с расширенной матрицы. Произведем следующие действия: $(2) - (1) \times 7$, $(3) - (1) \times 3$, получаем

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -52 & -5 \\ 0 & -5 & -13 & 0 \end{array} \right).$$

Разделим вторую строку на 4:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1,25 \\ 0 & -5 & -13 & 0 \end{array} \right).$$

Вычтем из третьей строки вторую:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & -5 & -13 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{array} \right).$$

Получили, что у основной матрицы системы $A \square \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ всего лишь две линейно

независимые строки — первая и вторая, значит, $\text{rang } A = 2$. Чтобы найти ранг расширенной матрицы системы, составим минор третьего порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1,25 \\ 0 & 0 & 1,25 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot (-1,25) = -6,25 \neq 0,$$



значит, $\text{rang } \tilde{A} = 3$. Так как $\text{rang } A \neq \text{rang } \tilde{A}$, то по теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

7. (РГР 1) Матричным способом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}. \text{ Решение представляется в виде: } X = A^{-1} \cdot B. \text{ Обратная}$$

матрица для основной матрицы системы найдена в примере 1.11, ее вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Имеем } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. (РГР 2) Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 1, \\ 7x_1 + 8x_2 + 18x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 17x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений, соответствующую окончательному виду расширенной матрицы системы из примера 1.15:

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{array} \right),$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 1, \\ -5x_2 - 13x_3 = -1,25, \\ 0x_3 = 1,25. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данная система несовместна, так как последнее уравнение неверно при любом значении x_3 .

9. Отрезок АВ точками C(3, 4) и D(5, 6) разделен на три равные части. Найти координаты точек А и В.

Решение. Обозначим координаты точек А и В так: А (x_1, y_1), В (x_2, y_2). Для отрезка AD точка С является серединой, потому $\lambda = AC/CD = 1$ и по формулам деления отрезка в данном отношении (2.6) получим

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_D}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + x_D}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + \lambda y_D}{1 + \lambda} = \frac{y_1 + y_D}{2}.$$

Подставим в последние равенства координаты x_C, y_C, x_D, y_D :

$$3 = (x_1 + 5)/2, \quad 4 = (y_1 + 6)/2,$$

откуда находим $x_1 = 1, y_1 = 2$. Точка А имеет координаты: А(1, 2).



Поскольку точка D есть середина отрезка CB , то $x_D = (x_C + x_2)/2$, или $5 = (3 + x_2)/2$, отсюда $x_2 = 7$.

$$y_D = (y_C + y_2)/2, 6 = (4 + y_2)/2,$$

отсюда $y_2 = 8$. Получили $B(7, 8)$.

Ответ: $A(1, 2)$, $B(7, 8)$.

10. Вычислить направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-3, 2, 0)$ и $B(3, -3, 1)$.

Решение. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются по его координатам формулами (2.28). Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ так, как это было сделано в задаче (2.5). Имеем $\overrightarrow{AB} = \{3 + 3, -3 + 2, 1 - 0\} = \{6, -1, 1\}$. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ находим по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38}$. Имеем теперь по формулам (2.28):

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{38}};$$

$$\cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{38}};$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{38}}.$$

11. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$.

Решение. Из определения скалярного произведения (формула (2.30)) следует, что искомым косинус угла между векторами определяется формулой $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$. Для нахождения $\cos \varphi$ по этой формуле необходимо найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, имеем: $\overrightarrow{AB} = \{2, -3, 6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6, 2, -3\}$. Вычисляя $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{AC}|$, получим

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{12}{49}.$$

12. Привести уравнение окружности $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$ к каноническому виду. Определить координаты центра и радиус.

Решение. Используем формулы для полного квадрата суммы и разности и дополним до полного квадрата выражения

$$а) x^2 - 2x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = (x - 1)^2 - 1;$$

$$б) y^2 + 6y = y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 3^2 = (y + 3)^2 - 9.$$

Уравнение окружности можно переписать теперь следующим образом:

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 3)^2 - 9 = 6, \text{ или } (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4^2.$$

Центр окружности $O(1; -3)$, радиус $R = 4$.

13. Установить, что уравнение $\rho = 36/(4 - 5 \cos \varphi)$ определяет гиперболу, и найти ее полуоси.

Решение. Разделим и числитель, и знаменатель на 4. Преобразуем данное уравнение к виду



$$\rho = \frac{9}{\left(1 - \frac{5}{4} \cos \varphi\right)}.$$

Поскольку $\varepsilon = c/a = 5/4 > 1$, найденное уравнение определяет правую ветвь гиперболы. Пользуясь формулами (3.50), $b^2 = c^2 - a^2$ и равенством, определяющим эксцентриситет, получим систему уравнений для нахождения a и b . Имеем

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{25}{16}, \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = 9, \quad a = 16,$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4}, \quad c = 20, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{400 - 256} = 12.$$

14. Составить уравнение плоскости, которая перпендикулярна вектору $\vec{n} = (8, 2, 1)$ и проходит через точку $P_0(3, -5, 4)$.

Решение. Выпишем координаты текущего вектора: $\overrightarrow{P_0M} = (x-3, y+5, z-4)$. Запишем в координатной форме условие ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{P_0M}$:

$$8(x-3) + 2(y+5) + 1(z-4) = 0,$$

$$8x + 2y + z - 18 = 0.$$

15. Дано уравнение плоскости в общем виде $2x - 2y + z - 20 = 0$.

Преобразовать это уравнение: 1) в уравнение плоскости в отрезках; 2) в нормальное уравнение плоскости.

Решение.

1) вычислим величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат, считая от начала координат. Полагая $y_0 = 0, z_0 = 0$, получим $2x_0 - 2 \cdot 0 + 0 - 20 = 0, x_0 = 10 = a$. Пусть теперь $x_1 = 0, z_1 = 0$, тогда $2 \cdot 0 - 2 \cdot y_1 + 0 - 20 = 0, y_1 = -10 = b$. Наконец, найдем отрезок, отсекаемый плоскостью на оси OZ , для чего положим $x_2 = 0, y_2 = 0, 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + z_2 - 20 = 0, z_2 = 20 = c$. Уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$x/10 + y/(-10) + z/20 = 1;$$

2) чтобы записать нормальное уравнение плоскости, вычислим

$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$. Поскольку знак у свободного члена отрицательный, то нормальное уравнение имеет вид

$$-2/3 \cdot x + 2/3 \cdot y - 1/3 \cdot z + 20/3 = 0.$$

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $(x-1)/2 = (y-3)/4 = z/(-1)$ и точку $P_1(1, 5, 2)$.

Решение. Запишем условие компланарности трех векторов: текущего $\overrightarrow{P_0M} = (x-1, y-3, z)$, вектора $\overrightarrow{P_0P_1} = (0, 2, 2)$, принадлежащего плоскости, и направляющего вектора данной прямой $\vec{a} = (2, 4, -1)$, параллельного данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (y-3) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -10(x-1) + 4(y-3) - 4z = 0,$$

$$5x - 2y + 2z + 1 = 0$$



— искомое общее уравнение плоскости.

Введение в математический анализ

1. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 6n^4 + 3n + 5}{(n+1)^6 - (n-2)^6}.$$

Решение. Прежде всего преобразуем знаменатель этой последовательности, используя формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned} (n+1)^6 - (n-2)^6 &= ((n+1)^3 - (n-2)^3)((n+1)^3 + (n-2)^3) = \\ &= 3((n+1)^2 + (n+1)(n-2) + (n-2)^2)((n+1)^2 - (n+1)(n-2) + (n-2)^2) \times \\ &\times (2n-1) = 3(2n-1)(3n^2 - 3n + 3)(n^2 - n + 7). \end{aligned}$$

Подставим этот результат в исходный предел и разделим числитель и знаменатель дроби на n^5 , после этого, отбрасывая бесконечно малые, получим требуемый предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 6/n + 3/n^4 + 5/n^5}{3(2 - 1/n)(3 - 3/n + 3/n^2)(1 - 1/n + 7/n^2)} = 1/6.$$

2. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 2}{9x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x + 1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 2}{9x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4}}{\frac{9x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x + 1}{x^4}} = \\ &= \frac{3 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{9 + 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 7 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}} = \frac{3 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0}{9 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 0 + 0} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{ctg} x$.

Решение. Данный предел представляет собой неопределенность типа « $0 \cdot \infty$ ». Для ее раскрытия введем новую переменную $\pi - x = t$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{ctg} x = \lim_{t \rightarrow 0} t \operatorname{ctg} (\pi - t) = -\lim_{t \rightarrow 0} t \operatorname{ctg} t = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = -1.$$

4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{если } x < 0, \\ a + 5x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

Решение. Запишем условие непрерывности функции в точке $x = 0$, где она пока не является непрерывной в силу произвольности числа a . Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0).$$



В данном случае

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{3x} = e^0 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (a + 5x) = a;$$

$$f(0) = (a + 5x)|_{x=0} = a.$$

Для непрерывности в точке $x = 0$ должно выполняться условие $a = 1$

5. Исследовать функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

на непрерывность и выяснить характер точек разрыва.

Решение. Нарушение непрерывности в данном случае возможно в точках $x = \pm 1$. Имеем в точке $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1-0} x^3 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1$, $f(1) = 1 \Rightarrow$ в точке $x = 1$ функция непрерывна. Исследуем точку $x = -1$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} 1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^3 = -1; \quad f(-1) = -1.$$

Таким образом, нарушается одно из условий непрерывности. Следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет разрыв 1-го рода, так как существуют, но не равны между собой односторонние пределы функций в этой точке.

Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного

1. Пользуясь определением производной, найти производную функции $f(x) = \cos mx$.

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(mx + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(mx + \frac{m}{2} \cdot \Delta x\right) \sin\left(\frac{m}{2} \cdot \Delta x\right)}{\Delta x} = \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(mx + \frac{m}{2} \cdot \Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{m}{2} \cdot \Delta x\right)}{\Delta x} = \\ &= 2 \sin(mx) \cdot \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{m}{2} \cdot \Delta x\right)}{\left(\frac{m}{2} \cdot \Delta x\right)} = -m \cdot \sin(mx). \end{aligned}$$

Здесь использовался первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

2. Исходя из определения производной, доказать, что производная четной (нечетной) дифференцируемой функции есть функция нечетная (четная).

Решение.



$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f(x - \Delta x) + f(x)}{-(-\Delta x)} = f'(x), & \text{если } f(-x) = -f(x), \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\left(\frac{f(x - \Delta x) - f(-x)}{-\Delta x}\right) = -f'(x), & \text{если } f(-x) = f(x). \end{cases}$$

3. Вычислить производную функции $f(x) = 3x^2 - 4x^{-0,5} + 7\sqrt[3]{x^2} - \frac{8}{\sqrt[5]{x^4}}$.

Решение.

Перепишем функцию так: $f(x) = 3x^2 - 4x^{-0,5} + 7x^{2/3} - 8x^{-4/5}$,

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 4 \cdot (-0,5)x^{-0,5-1} + 7 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 8 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)x^{-\frac{4}{5}-1} =$$

$$= 6x + \frac{2}{\sqrt{x^3}} + \frac{32}{5\sqrt[5]{x^9}} + \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная определена при $x \in (0; +\infty)$.

4. Вычислить производную функции $f(x) = \operatorname{tg}(2^x \cdot \sqrt{x})$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(2^x \cdot \sqrt{x})} (2^x \cdot \sqrt{x})' = \frac{1}{\cos^2(2^x \cdot \sqrt{x})} ((2^x)' \cdot \sqrt{x} + 2^x \cdot (\sqrt{x})') =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(2^x \cdot \sqrt{x})} (2^x \ln 2 \cdot \sqrt{x} + 2^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}), \quad x \in (0; +\infty).$$

5. Вычислить производную функции $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\log_3 x}{x^5}\right)$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\log_3 x}{x^5}\right)^2} \cdot \frac{(\log_3 x)' \cdot x^5 - \log_3 x \cdot (x^5)'}{(x^5)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\log_3 x}{x^5}\right)^2} \cdot \frac{x \ln 3 \cdot x^5 - \log_3 x \cdot 5x^4}{x^{10}}; \quad x \in (0; +\infty).$$

3. Найти первый дифференциал для функции $d\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right)$.

Решение.



$$\begin{aligned} d\left(\arctg\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)\right) &= \frac{1}{1+\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^2} \cdot d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)^2} \cdot \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)} = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x) + u^2(x)}. \end{aligned}$$

8. Найти вторую производную $y''(x)$ от функции $\arctg(2y(x)) + y(x) - x = 0$, заданной неявно.

Решение.

$$\begin{aligned} (\arctg(2y(x)) + y(x) - x)'_x &= (0)'_x, \\ \frac{2}{1+y^2(x)} \cdot y'(x) + y'(x) - 1 &= 0, \\ y'(x) &= \frac{1}{\frac{2}{1+y^2(x)} + 1} = \frac{1+y^2(x)}{3+y^2(x)} = \frac{3+y^2(x)-2}{3+y^2(x)} = 1 - \frac{2}{3+y^2(x)}. \\ y''(x) &= (1)' - \left(\frac{2}{3+y^2}\right)' = 2 \cdot 2y'(3+y^2)^{-2} = \frac{4 \cdot \frac{1+y^2}{3+y^2}}{(3+y^2)^2} = \frac{4 \cdot (1+y^2)}{(3+y^2)^3}. \end{aligned}$$

9. С помощью теоремы Лагранжа доказать следующее утверждение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы при любых значениях $x > a$ и пусть выполняются соотношения $f(a) = g(a)$, $f'(x) > g'(x)$ при $x > a$, тогда справедливо неравенство $f(x) > g(x)$ при $x > a$.

Решение. Составим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. На произвольном отрезке $[a; x]$ справедлива теорема Лагранжа и существует некоторая точка c , в которой выполняется равенство $h(x) - h(a) = h'(c)(x - a)$.

Поскольку $h(a) = f(a) - g(a) = 0$, $h'(c) = f'(c) - g'(c) > 0$, $x - a > 0$, то $h(x) > 0$ при $x > a$ и $f(x) > g(x)$ при $x > a$.

10. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ по формуле Тейлора по степеням $(x + 1)$, т. е. с центром разложения в точке $x_0 = -1$.

Решение.

$$f(-1) = -12, f'(x) = 3x^2 - 8x + 5, f'(-1) = 16, f''(x) = 6x - 8, f''(-1) = -14, f'''(x) = 6, f'''(-1) = 6, f^{(n)}(x) = 0, \text{ если } n > 3.$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \\ &+ \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \dots = -12 + \frac{16}{1}(x+1) + \frac{-14}{2}(x+1)^2 + \\ &+ \frac{6}{6}(x+1)^3 + 0 = -12 + 16(x+1) - 7(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

11. По формуле Маклорена вычислить $\cos(0,1)$, используя только первые два члена разложения, и оценить погрешность вычисления.



Решение.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R = \cos 0,1 \approx 1 - \frac{0,1^2}{2} + R = 0,995 + R.$$

Здесь погрешность вычисления определяется оценкой остаточного члена в форме

$$\text{Лагранжа } |R| = \left| \frac{\cos(0,1 \cdot \theta)}{24} \right| \cdot \frac{1}{24} \approx 0,042.$$

Здесь θ некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \theta < 1$.

Итак, $\cos 0,1 \approx 0,995 \pm 0,042$.

12. С помощью формул Тейлора и Маклорена вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

Решение.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x^3/6 + o(x^4)) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3} \right) = \frac{1}{6};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)) - x + x^2/2}{x^3} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{3}.$

Неопределенные, определенные интегралы и несобственные интегралы

1. Найти интеграл $\int x^{1/3} (2 + 3x^{1/2})^3 dx$.

Решение. Здесь $m = 1/3$, $n = 1/2$, $p = 3$. Наименьшее общее кратное знаменателей m и n , то есть чисел 2 и 3, равно 6. Поэтому полагаем $t = \sqrt[6]{x}$. Тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $x^{1/3} = t^2$, $x^{1/2} = t^3$. В результате применения указанной подстановки интеграл преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int x^{1/3} (2 + 3x^{1/2})^3 dx &= 6 \int t^2 (2 + 3t^3)^3 t^5 dt = 6 \int t^7 (8 + 36t^3 + 54t^6 + 27t^9) dt = \\ &= 48 \int t^7 dt + 216 \int t^{10} dt + 324 \int t^{13} dt + 162 \int t^{16} dt = \frac{48}{8} t^8 + \frac{216}{11} t^{11} + \frac{324}{14} t^{14} + \\ &+ \frac{162}{17} t^{17} + C = 6\sqrt[3]{x^4} + \frac{216}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + \frac{162}{7} \sqrt[3]{x^7} + \frac{162}{17} \sqrt[6]{x^{17}} + C. \end{aligned}$$

2) Число $\frac{m+1}{n}$ – целое. В этом случае интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{a + bx^n}$, где n – знаменатель рационального числа p .

2. Найти интеграл $\int x^{1/4} (1 + x^{1/2})^{-7/2} dx$.



Решение. В рассматриваемом случае $m = 1/4$, $n = 1/2$, $p = -7/2$, $\frac{m+1}{n} + p = -1$

– целое. Положим $t = \sqrt{1 + \frac{1}{x^{1/2}}}$. Тогда $t^2 = 1 + \frac{1}{x^{1/2}}$, $x^{1/2} = \frac{1}{t^2 - 1}$, $x = \frac{1}{(t^2 - 1)^2}$,

$$dx = -4t(t^2 - 1)^{-3} dt, \quad x^{1/4} = \frac{1}{(t^2 - 1)^{1/2}}, \quad 1 + x^{1/2} = 1 + \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{t^2}{t^2 - 1}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int x^{1/4} (1 + x^{1/2})^{-7/2} dx &= \int \frac{1}{(t^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} \right)^{-7/2} (-4t(t^2 - 1)^{-3}) dt = \\ &= -4 \int t^{-6} dt = \frac{4}{5t^5} + C = \frac{4}{5} \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{(1 + x^{1/2})^5}} + C. \end{aligned}$$

3. Вычислить интеграл $I = \int_0^2 x^3 dx$

$$\text{Решение: } I = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4.$$

4. Вычислить интеграл $I = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx$.

Решение: Формальное применение формулы Ньютона-Лейбница здесь невозможно, поскольку $F(x) = 1/(1 + 3^{1/x})$ является первообразной для подынтегральной функции всюду, кроме $x = 0$, но эта точка принадлежит отрезку интегрирования $[-1, 1]$. Для того, чтобы вычислить данный интеграл, воспользуемся свойством аддитивности и разобьем исходный интеграл на два интеграла по областям $[-1, 0]$ и $[0, 1]$, а затем для каждого неопределенного интеграла выпишем соответствующие первообразные. Имеем:

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 3^{1/x}} \right) dx.$$

Для первого интеграла первообразную обозначим $F_1(x)$ $x \in [-1, 0]$, для второго $F_2(x)$ $x \in [0, 1]$.



$$F_1(x) = \begin{cases} 1 / (1 + 3^{1/x}), & \text{при } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 1 / (1 + 3^{1/x}), & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$I = F_1(0) - F_1(-1) + F_2(1) - F_2(0) = 1 - 3/4 + 1/4 - 0 = 1/2.$$

5. Вычислить интеграл $\int_1^{\infty} dx / x^{3/2}$.

Решение. По определению несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом

$$\int_1^{\infty} dx / x^{3/2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b dx / x^{3/2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2x^{1/2}} \right) \Big|_1^b = 2.$$

6. Вычислить интеграл $I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$.

Решение. С помощью формулы интегрирования по частям найдем

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = -\lim_{b \rightarrow \infty} x^n e^{-x} \Big|_0^b + n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

отсюда

$$I_n = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^n e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-b^n e^{-b} + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx \right) = n I_{n-1}.$$

Найдем $I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx$

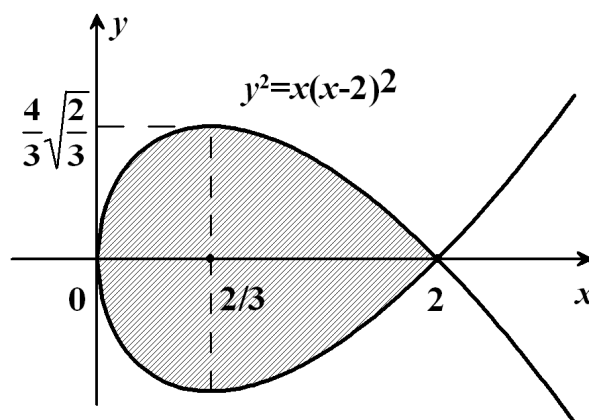
$$I_0 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^0 - e^{-b}) = 1.$$

Таким образом

$$I_1 = 1 \cdot I_0 = 1, \quad I_2 = 2 \cdot I_1 = 2, \dots, \quad I_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y^2 = x(x-2)^2$.

Решение. В силу симметрии фигуры можно вычислить половину площади, а затем результат удвоить. Найдем пределы интегрирования. При $y = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$.

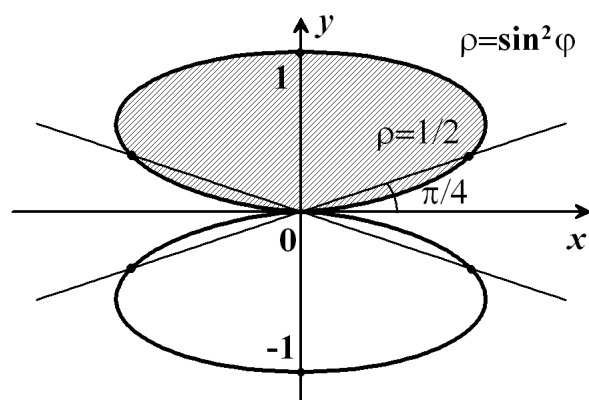


$$\left| \int_0^2 \sqrt{x} (x-2) dx \right| = \left| \int_0^2 (x^{3/2} - 2x^{1/2}) dx \right| = \left| \left[2x^{5/2} / 5 - 4x^{3/2} / 3 \right]_0^2 \right| = \left| -2^{9/2} / 15 \right|.$$

Знак минус под модулем означает, что найдена площадь нижней половины. Вся площадь
 $S = 2 \cdot 2^{9/2} / 15 = 2^{11/2} / 15.$

8. Вычислить площадь одного лепестка кривой $\rho = \sin^2 \varphi$.

Решение. При изменении φ от 0 до π получается один лепесток данной кривой



$$\begin{aligned} S &= 0,5 \int_0^\pi (\sin \varphi)^2 d\varphi = 0,125 \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = 0,125 \int_0^\pi (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\ &= 0,125 \int_0^\pi (1 - 2\cos 2\varphi + 0,5(1 + \cos 4\varphi)) d\varphi = 0,125 (1,5\varphi - \sin 2\varphi + 0,125 \sin 4\varphi) \Big|_0^\pi = 3\pi / 16. \end{aligned}$$

Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных

1. Найти поверхности уровня функции $u = \operatorname{sgn}(\cos(x^2 + y^2 + z^2))$.

Решение. Функция $u = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:



$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}.$$

Следовательно, рассматриваемая функция принимает только три значения $-1, 0, 1$. Осталось найти множества $P(x, y, z)$ в декартовой прямоугольной системе координат $OXYZ$, соответствующих этим значениям функции.

Имеем для значения $u = 0$ условие $\cos(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Отсюда следует, что $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то есть значение $u = 0$ достигается на концентрических сферах радиуса $\sqrt{\pi(2n+1)/2}$.

Для значения $u = 1$ имеем условие $\cos(x^2 + y^2 + z^2) > 0$, которое выполняется:

1) если $2\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Полученное неравенство определяет сферический слой, заключенный между сферами радиусов $\sqrt{2\pi n}$ и $\sqrt{\pi(4n+1)/2}$.

2) если $\frac{3}{2}\pi + 2\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < 2\pi(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это неравенство также определяет сферический слой, заключенный между сферами радиусов $\sqrt{\pi(4n+3)/2}$ и $\sqrt{2\pi(n+1)}$.

Наконец, значение $u = -1$ достигается там, где выполняется условие $\cos(x^2 + y^2 + z^2) < 0$, то есть при $2\pi n + \frac{\pi}{2} < x^2 + y^2 + z^2 < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, $u = -1$ достигается в сферическом слое, который в данном случае заключен между сферами радиусов $\sqrt{\pi(4n+1)/2}$ и $\sqrt{\pi(4n+3)/2}$.

2. Найти частные производные функции

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^4 + \frac{2xyz}{y^2 + z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0 \\ x^4, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases},$$

в точке $A(1, 0, 0)$.



Решение. Рассмотрим функцию $f(x, 0, 0) = x^4$. Найдем производную этой функции: $f'_x(x, 0, 0) = 4x^3$ и $f'_x(1, 0, 0) = 4$. Далее рассмотрим функции $f(1, y, 0) = 1$ и $f(1, 0, z) = 1$. Имеем: $f'_x(1, y, 0) = 0$, $f'_z(1, 0, z) = 0$ и, в частности $f'_y(1, 0, 0) = 0$ и $f'_z(1, 0, 0) = 0$. Таким образом, частные производные функции в точке $A(1, 0, 0)$ существуют, но, как это показано в примере 9.11, функция разрывная в точке $A(1, 0, 0)$. Следовательно, существование частных производных в точке в общем случае не гарантирует непрерывность функции в этой точке.

3. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{при } x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{при } x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная частная производная второго порядка представляет собой частную производную по переменной y от частной производной первого порядка по переменной x . Поэтому сначала необходимо вычислить f'_x . Имеем:

$$f'_x = \frac{y^2(x^2 + y^4) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{x^2 y^2 + y^6 - 2x^2 y^2}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{y^6 - x^2 y^2}{(x^2 + y^4)^2},$$

при $x^2 + y^4 \neq 0$. При $x^2 + y^4 = 0$ в соответствии с определением частной производной имеем ($\Delta x \equiv x$):

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y^2}{x^2 + y^4} \Big|_{y=0} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0 - 0) = 0.$$

Найдем теперь частную производную f''_{xy} в точке $(0, 0)$. Имеем в соответствии с определением ($\Delta y \equiv y$):

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^6 - x^2 y^2}{y(x^2 + y^4)^2} \right) \Big|_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^3}.$$

Последний предел не существует, следовательно, не существует и $f''_{xy}(0, 0)$.

4. Найти дифференциал df :

$$1) f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), 2) f(x, y) = xy + e^{x+y} + 1.$$

Решение.

Найдём прежде всего частные производные f'_x и f'_y :



$$f'_x = \left(\arctg \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y = \left(\arctg \left(\frac{y}{x} \right) \right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$df(P) = f'_{x_1} \Delta x_1 + f'_{x_2} \Delta x_2 + \dots + f'_{x_n} \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f'_{x_i} \Delta x_i \text{ получим } df:$$

$$df = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Delta x + \frac{x}{x^2 + y^2} \Delta y.$$

Находим:

$$f'_x = y + e^{x+y}, \quad f'_y = x + e^{x+y},$$

$$df = (y + e^{x+y}) \Delta x + (x + e^{x+y}) \Delta y.$$

5. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \arcsin(x^2 + y^2 + t^2)$, где $x = 2t$, $y = 4t^2$.

Решение. Искомая производная находится по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

. Находим необходимые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2t}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}; \quad \frac{dx}{dt} = 2; \quad \frac{dy}{dt} = 8t.$$

Подставляя, получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2t + 2x \cdot 2 + 2y \cdot 8t}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}} = \frac{2t(1 + 4t + 32t^2)}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + t^2)^2}}.$$

6. Найти условный экстремум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 4$ при выполнении условия связи $x_1 + x_2 + 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа



$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(x_1 + x_2 + 3).$$

Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} \partial L / \partial x_1 = 2x_1 - x_2 + 1 + \lambda = 0 \\ \partial L / \partial x_2 = 2x_2 - x_1 + 1 + \lambda = 0. \\ \partial L / \partial \lambda = x_1 + x_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Составим определитель в соответствии с формулой (9.45)

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \left(0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 6 > 0,$$

следовательно, в точке $x_1 = x_2 = -1,5$ имеется условный минимум
 $f(-1,5; -1,5) = -4,75$.

Числовые и функциональные ряды

1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \dots$$

Решение. Преобразуем общий член этого ряда:

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right).$$

После этого нетрудно рассчитать частичные суммы ряда:

$$S_n = \sum_{p=1}^n a_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n + 1} \right).$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n + 1} \right) = \frac{1}{2}$, то согласно определению данный ряд

сходится и его сумма $S = \frac{1}{2}$, иными словами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

2. Доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 3}{5n^2 - 2n}.$$



Решение. Исходя из доказательства расходимости (см. учебник) гармонического ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Найдём предел отношения членов этих рядов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{5n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{5}.$$

3. Исследовать на сходимость ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция положительна и монотонна

при $x \geq 1$, кроме того, $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$. Следовательно,

вопрос о сходимости данного ряда сводится по теореме 10.14 к исследованию

несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, a \geq 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Последняя выкладка показывает, что несобственный интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$. При $p = 1$ он также расходится, поскольку в этом случае

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln \frac{A}{a} \rightarrow +\infty \text{ при } A \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

4. Найти сумму ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Решение. Будем базироваться на бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Пусть $|x| < 1$, применим к этому ряду теорему 10.25 ($x_0 = 0$).

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

При $x = -1$ получаем исходный ряд умноженный на (-1) .



С другой стороны

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

На основании замечания 10.2 в качестве верхнего предела интегрирования можно взять

$$x = -1. \text{ Следовательно, } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln 2.$$

$$\text{Сумма исходного ряда } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.$$

5. Написать ряд Фурье для функции $f(x)$, определяемой равенствами

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0, x = -\pi \\ \pi/4, & 0 < x < \pi \end{cases},$$

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Решение. Рассматриваемая функция нечётная, имеет разрывы первого рода в точках $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) со скачком равным $\pi/2$. Далее

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f^2(x) dx = 2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \pi = \frac{\pi^3}{8} < +\infty.$$

Рассчитаем коэффициенты Фурье этой функции. В силу нечётности $f(x)$ все коэффициенты a_k для этой функции обратятся в 0.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin kx dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} 0, & k - \text{чётное} \\ 1/k, & k - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Окончательно, получаем следующий результат

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Кратные интегралы. Криволинейные интегралы

1. Вычислить двукратные интегралы. Изменить порядок интегрирования.

$$\text{а) } \int_0^2 dx \int_0^3 (x^2 + 2xy) dy; \quad \text{б) } \int_{-2}^0 dy \int_0^{y^2} (x + 2y) dx; \quad \text{в) } \int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y} dy.$$

Решение. а) Вначале вычислим внутренний интеграл, считая x постоянной величиной



$$\int_0^3 (x^2 + 2xy) dy = \left(x^2 y + xy^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=3} = 3x^2 + 9x.$$

Осуществляем подстановку этой функции во внутренний интеграл и рассчитываем его по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_0^2 (3x^2 + 9x) dx = \left(x^3 + \frac{9}{2} x^2 \right) \Big|_0^2 = 8 + 18 = 26.$$

Теперь изменим порядок интегрирования и проведём аналогичные вычисления

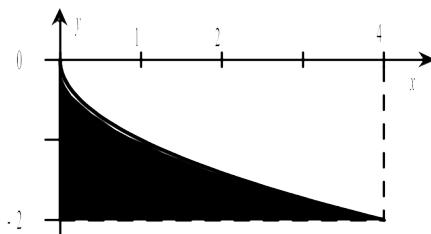
$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^3 (x^2 + 2xy) dy &= \int_0^3 dy \int_0^2 (x^2 + 2xy) dx = \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y \right) \Big|_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^3 \left(\frac{8}{3} + 4y \right) dy = \\ &= \left(\frac{8}{3} y + 2y^2 \right) \Big|_0^3 = 8 + 18 = 26. \end{aligned}$$

б) При вычислении внутреннего интеграла величина y считается постоянной

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 dy \int_0^{y^2} (x + 2y) dx &= \int_{-2}^0 \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_{-2}^0 \left(\frac{y^4}{2} + 2y^3 \right) dy = \left(\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{2} \right) \Big|_{-2}^0 = \\ &= \frac{32}{10} - 8 = -\frac{24}{5}. \end{aligned}$$

Чтобы осуществить интегрирование в другом порядке необходимо прежде всего правильно расставить пределы. На рисунке показана область интегрирования

$\Omega = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq y^2; -2 \leq y \leq 0 \}$. Рисунок



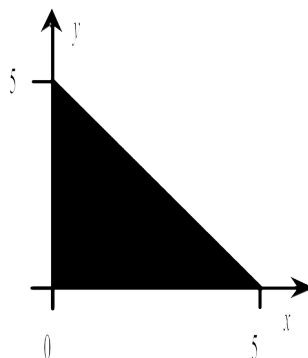
Прямые параллельные оси OY пересекают область Ω в точках $y = -2$ и $y = -\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$. С учётом сказанного получаем



$$\int_0^4 dx \int_{-2}^{-\sqrt{x}} (x + 2y) dy = \int_0^4 \left(xy + y^2 \right) \Big|_{-2}^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(3x - x^{\frac{3}{2}} - 4 \right) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 4x \right) \Big|_0^4 =$$

$$= 24 - \frac{64}{5} = -\frac{24}{5}.$$

в) Изобразим область интегрирования $\Omega = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 5 - x \}$. Эта область представлена на рисунке



В данном примере расчёты проводятся одинаково при любом порядке интегрирования

$$\int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y} dy = \frac{2}{3} \int_0^5 \left(4+x+y \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{5-x} dx = \frac{2}{3} \int_0^5 \left(9^{\frac{3}{2}} - (4+x)^{\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left(27x - \frac{2}{5} (4+x)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^5 = \frac{2}{3} \left(135 - \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) \right) = \frac{506}{3}.$$

3. Вычислить двойной интеграл $\iint_{\Omega} (2x + 3y + 1) dx dy$ по области Ω , ограниченной треугольником с вершинами $A(1,3)$; $B(-1,-1)$; $C(2,-4)$.

Решение.

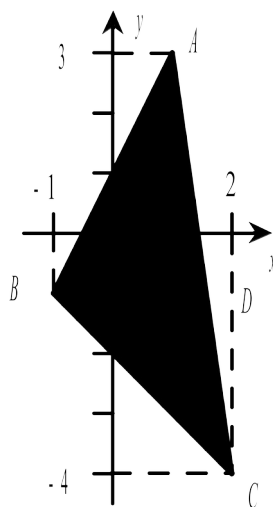
Указанный треугольник изображён на рисунке. Проведём отрезок BD параллельный оси OX . Тем самым исходный треугольник ABC будет разбит на два треугольника ABD и DBC . Далее напомним уравнения прямых, содержащих стороны треугольника AB , BC и CA .

$$AB \subset l_{AB} : \frac{-1-3}{-1-1} = \frac{y-3}{x-1} \quad \text{или} \quad x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2};$$

$$BC \subset l_{BC} : \frac{-4+1}{2+1} = \frac{y+1}{x+1} \quad \text{или} \quad x = -y - 2;$$



$$CA \subset l_{CA} : \quad \frac{3+4}{1-2} = \frac{y+4}{x-2} \quad \text{или} \quad x = -\frac{y}{7} + \frac{10}{7}.$$



Рисунок

Теперь можно приступить к повторному интегрированию (внутреннее интегрирование по переменной x , внешнее по переменной y).

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (2x + 3y + 1) dx dy &= \int_{-4}^{-1} dy \int_{-\frac{y}{7} - 2}^{-\frac{y}{7} + \frac{10}{7}} (2x + 3y + 1) dx + \int_{-1}^3 dy \int_{\frac{y-1}{2}}^{-\frac{y}{7} + \frac{10}{7}} (2x + 3y + 1) dx = \\ &= \int_{-4}^{-1} \left(x^2 + 3yx + x \right) \Big|_{-\frac{y}{7} - 2}^{-\frac{y}{7} + \frac{10}{7}} dy + \int_{-1}^3 \left(x^2 + 3yx + x \right) \Big|_{\frac{y-1}{2}}^{-\frac{y}{7} + \frac{10}{7}} dy = \\ &= \int_{-4}^{-1} \left(\left(-\frac{y}{7} + \frac{10}{7} \right)^2 + 3y \left(-\frac{y}{7} + \frac{10}{7} \right) + \frac{10}{7} - \frac{y}{7} \right) dy + \\ &+ \int_{-1}^3 \left(\left(-\frac{y}{7} + \frac{10}{7} \right)^2 + 3y \left(-\frac{y}{7} + \frac{10}{7} \right) + \frac{10}{7} - \frac{y}{7} \right) dy - \int_{-4}^{-1} \left(\left(\frac{y-1}{2} \right)^2 - 3y \left(\frac{y-1}{2} \right) - \frac{y-1}{2} \right) dy - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \int_{-1}^3 \left(\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + 3y \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \right) dy = \int_{-4}^3 \left(-\frac{20}{49}y^2 + \frac{183}{49}y + \frac{170}{49} \right) dy - \\
 & - \int_{-4}^{-1} (-2y^2 - 3y + 2) dy - \int_{-1}^3 \left(\frac{7}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4} \right) dy = \left(-\frac{20}{147}y^3 - \frac{183}{98}y^2 + \frac{170}{49}y \right) \Big|_{-4}^3 - \\
 & - \left(-\frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y \right) \Big|_{-4}^{-1} - \left(\frac{7}{12}y^3 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{4}y \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{8065}{249} - \frac{37}{12} - \frac{28}{3} = -\frac{83}{294}.
 \end{aligned}$$

4. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

а) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^2$; б) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

Решение.

а) Перейдём к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$, получим уравнение линии, ограничивающей Ω в полярных координатах

$$\rho^4 = 2\rho^2 \sin^2 \varphi, \quad \rho^2 = 2 \sin^2 \varphi, \quad \rho = \sqrt{2 \sin^2 \varphi} = 2|\sin \varphi|.$$

Эта фигура Ω - двулистник. Находим площадь одного листа и удваиваем её, при этом

$$D = \{ (\varphi, \rho) : 0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \sin \varphi \}$$

$$S_{\Omega} = 2 \iint_D \rho d\rho d\varphi = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2} \sin \varphi} \rho d\rho = 2 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \pi.$$

б) Проще всего как и в примере а) перейти к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$, получаем

$$\rho^2 = \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi.$$

Область изменения переменных ρ, φ

$$D = \left\{ (\varphi, \rho) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi} \right\}.$$

Находим площадь Ω в полярных координатах

$$S_{\Omega} = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi}} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi \right) d\varphi = \pi - \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi =$$



$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

5. Найти объём тела, ограниченного заданными поверхностями

сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$ и параболоидом вращения $x^2 + y^2 = 2Rz$.

Решение.

а) Очевидно, что проекцией этого тела на плоскость XOY будет некоторый круг радиуса r_0 .

Введём цилиндрические координаты $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $z = z$. Определим прежде всего r_0 . Для этого в уравнении сферы заменим $x^2 + y^2 = 2Rz$ (из уравнения параболоида).

Получим квадратное уравнение относительно z :

$$z^2 + 2Rz - 3R^2 = 0.$$

Корни этого уравнения определяются по теореме Виета $z_1 = -3R$, $z_2 = R$. Первый корень отбрасываем. Теперь можно определить искомый r_0 (из уравнения сферы или параболоида) $x^2 + y^2 = 2Rz = 2R^2$, т.е. $r_0 = \sqrt{2}R$.

Объём тела вычисляем с помощью тройного интеграла

$$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_D r dr d\varphi dz.$$

При переходе к цилиндрическим координатам область Ω трансформируется в

область $D = \left\{ (r, \varphi, z) : \varphi \in [0, 2\pi]; 0 \leq r \leq r_0; \frac{r^2}{2R} \leq z \leq \sqrt{3R^2 - r^2} \right\}$. Получаем

$$\begin{aligned} V_{\Omega} &= \iiint_D r dr d\varphi dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} r dr \int_{\frac{r^2}{2R}}^{\sqrt{3R^2 - r^2}} dz = 2\pi \int_0^{r_0} \left(\sqrt{3R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2R} \right) r dr = \\ &= \pi \int_0^{r_0} \left(\sqrt{3R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2R} \right) dr^2 = \pi \int_0^{2R^2} \left(\sqrt{3R^2 - t} - \frac{t}{2R} \right) dt = \pi \left(-\frac{2}{3} (3R^2 - t)^{\frac{3}{2}} - \frac{t^2}{4R} \right) \Bigg|_0^{2R^2} = \\ &= \pi \frac{6\sqrt{3} - 5}{3} R^3. \end{aligned}$$

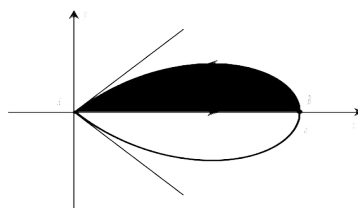
6. Вычислить криволинейный интеграл II рода.



$$\int_L x^2 y dx - y^2 x dy, \text{ где } L : (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)^2, y \geq 0 \text{ от } A(0,0) \text{ до } B(a,0).$$

Решение.

Чтобы получить представление о кривой L , называемой лемнискатой, проще всего перейти к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (смотрите рисунок).



Рисунок

$$L : r^2 = a^2 \cos^2 \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Соединяя точки A и B отрезком оси OX , получим замкнутый контур C , ограничивающий область Ω . Векторное поле $\vec{A} = (P, Q) = (x^2 y, -y^2 x)$ непрерывно-дифференцируемо в $\overline{\Omega}$, поэтому можно применить к контурному интегралу по C формулу Грина. Получаем

$$\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy = \iint_{\Omega} (-x^2 - y^2) dx dy.$$

Используя свойство криволинейных интегралов можно записать

$$\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy = \int_{AB} x^2 y dx - y^2 x dy - \int_L x^2 y dx - y^2 x dy$$

Учтём, что интеграл по отрезку AB обращается в нуль ($y = 0$, $dy = 0$ на оси OX), следовательно, искомый интеграл равен

$$\int_L x^2 y dx - y^2 x dy = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам



$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_D r^3 dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{a^4}{8} \left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^4}{32}.\end{aligned}$$

Функции комплексного переменного

1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел

$$z_1 = 4 + 3i, \quad z_2 = 3 - 4i.$$

Решение.

В соответствии с определением суммы двух комплексных чисел для ее нахождения необходимо сложить действительные части слагаемых чисел и этот результат сложения составит действительную часть суммы, и также сложить мнимые части слагаемых чисел и этот результат составит мнимую часть суммы. Имеем таким образом:

$$z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (3 - 4i) = (4 + 3) + (3 - 4)i = 7 - i.$$

Аналогично для нахождения разности двух комплексных чисел необходимо, в отличие от рассмотренного выше нахождения суммы комплексных чисел, найти не сумму соответствующих частей чисел z_1 и z_2 , а их разность, т. е.

$$z_1 - z_2 = (4 + 3i) - (3 - 4i) = (4 - 3) + (3 - (-4))i = 1 + 7i.$$

Для нахождения произведения комплексных чисел z_1 и z_2 , в соответствии с данным выше определением, достаточно выполнить умножение этих комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, по правилу умножения многочлена на многочлен, учитывая, что $i^2 = -1$. Имеем:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (4 + 3i)(3 - 4i) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot (-4i) + 3i \cdot 3 + 3i \cdot (-4i) = 12 - 16i + 9i - 12i^2 = \\ &= 24 - 7i.\end{aligned}$$

Для нахождения частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 , т. е. дроби z_1/z_2 , необходимо, в соответствии с изложенным выше умножить числитель и знаменатель искомого отношения чисел z_1 и z_2 , на число, комплексно сопряженное делителю z_2 , т. е. на число $\overline{z_2}$. Имеем:



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3i}{3-4i} = \frac{(4+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}.$$

Произведение любого комплексного числа на комплексно-сопряженное ему дает действительное число, равное квадрату модуля этого комплексного числа:

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

Таким образом, получим, что:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4+3i)(3+4i)}{3^2 + (-4)^2} = \frac{25i}{25} = i.$$

2. Найти пределы следующих последовательностей: а) $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{3+4i}{7}\right)^n, n \in \mathbb{N}\right\},$

Решение.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, очевидно, ее k -й член может быть представлен следующим образом:

$$a_k = \left(\frac{3+4i}{7}\right)^k = \frac{(3+4i)^k}{7^k} = \frac{\left(5e^{i \arctg \frac{4}{3}}\right)^k}{7^k} = \frac{5^k}{7^k} e^{ik \arctg \frac{4}{3}}.$$

Непосредственно отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и номера

$k > \left[\log_{\frac{5}{7}} \varepsilon\right] = N(\varepsilon)$ выполнено соотношение $|a_k| = \left|\frac{5^k}{7^k} e^{ik \arctg \frac{4}{3}}\right| = \left(\frac{5}{7}\right)^k < \varepsilon$, которое, по

определению предела последовательности комплексных чисел, означает, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

3. Найти предел функции: $\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 1 + i},$

Решение:

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 1 + i} = \lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{(z-1)^2 + 1}{z - 1 + i} = \lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{(z-1+i)(z-1-i)}{z - 1 + i} = \lim_{z \rightarrow 1-i} (z-1-i) = -2i.$$

4. Дифференцируема ли функция: а) $f(z) = y^2 + x^2 + 2ixy,$

Решение:

Для того, чтобы функция комплексной переменной $f(z)$ была дифференцируема в некоторой области D комплексной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы



действительная и мнимая части функции $f(z)$ были дифференцируемы и выполнялись условия Коши-Римана.

Рассмотрим функцию $f(z) = y^2 + x^2 + 2ixy$, ясно, что функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = y^2 + x^2$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = 2xy$ дифференцируемы $\forall x, y \in \mathbb{R}$, условия Коши Римана не выполнены:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \neq -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ не дифференцируема.

5. Вычислить $\int_L \frac{dz}{(z-a)^n}$, где L — окружность радиуса R с центром в точке a , приходящаяся против часовой стрелки, n — целое число.

Решение.

Ясно, что $L = \{z \mid |z-a| = R\}$, отсюда $L = \{z \mid z = Re^{i\varphi} + a, \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Таким образом:

$$\int_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \left\{ \begin{array}{l} z = Re^{i\varphi} + a \\ dz = iRe^{i\varphi} d\varphi \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi} d\varphi}{(Re^{i\varphi} + a - a)^n} = iR \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} = iR^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(1-n)} d\varphi =$$

$$= \begin{cases} i \int_0^{2\pi} d\varphi, & n=1; \\ \frac{iR^{1-n}}{i(1-n)} \left\{ e^{i\varphi(1-n)} \right\} \Big|_0^{2\pi}; & n \neq 1. \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

6. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z-2$ функцию $f(z) = z^{-1}$.

Решение.



Ряд Тейлора имеет вид $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Его коэффициенты определяются

формулой $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. В нашем примере $z_0 = 2$, $f(z) = \frac{1}{z}$.

Хорошо понятно, что $\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$, тогда $c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$, а значит

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z - 2)^n.$$

7. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^k \sin \frac{1}{z^k}$, $k \in \mathbb{Z}$ в окрестности точки $z = 0$.

Решение.

Функция $f(z)$ имеет изолированную особую точку $z = 0$. В окрестности $0 < |z| < a$, $a > 0$ функция $f(z)$ аналитическая, разложим ее в ряд Лорана:

$$f(z) = z^k \sin \frac{1}{z^k} = z^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{1}{z^k}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2k(1-n)}}{(2n-1)!}.$$

Дифференциальные уравнения

1. Найдите общее решение $y' = \frac{y^2}{x}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$. Соберем в левой части все, зависящее от y , а все от x – в правой части: $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$. Интегрируем обе части каждую по своей переменной $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x}$, удобно для дальнейшего получения решения в явной форме представить произвольную константу интегрирования в виде $\ln C$: $-\frac{1}{y} = \ln x + \ln C$



– получили общее решение ОДУ в неявной форме. В явном виде решение имеет вид:

$$y = -\frac{1}{\ln(Cx)}.$$

2. Решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(1 - \ln \left(\frac{x}{y} \right) \right)$, $y(1) = e$.

Решение. $u(x) = \frac{y(x)}{x}$; $y(x) = xu(x)$; $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$; $u + x \frac{du}{dx} = u \left(1 - \ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)$;

$$x \frac{du}{dx} = u \ln u; \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}; \int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x}; \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + \ln C, |\ln u| = \ln C |x|; u = e^{Cx};$$

$y = xe^{Cx}$ – общее решение. Частное решение с учетом начального условия $y = xe^x$.

3. Получить общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{4x + 4y - 1}$.

Решение. Составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Имеем 3-й случай. Введем замену

$$z = x + y, \quad 4x + 4y = 4z, \quad dy = dz - dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1. \quad \text{Уравнение принимает вид}$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z + 1}{4z - 1}. \quad \text{Разделяем переменные} \quad \frac{(4z - 1)dz}{5z} = dx. \quad \text{Интегрируем}$$

$$\frac{4}{5} \int dz - \frac{1}{5} \int \frac{dz}{z} = x + C, \quad \frac{4}{5} z - \frac{1}{5} \ln |z| = x + C. \quad \text{Возвращаемся к прежним переменным}$$

$$\frac{4}{5} (x + y) - \frac{1}{5} \ln |x + y| = x + C.$$

5. Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$ методом Бернулли.

Решение. Представим неизвестную функцию $y(x)$ в виде произведения двух новых

неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, при этом $\frac{dy}{dx} = v(x) \frac{du}{dx} + u(x) \frac{dv}{dx}$.

2-ой шаг. Подставим выражения для $y(x)$ и ее производной в исходное уравнение

$$v(x) \frac{du}{dx} + u(x) \frac{dv}{dx} + xu(x)v(x) = x^2 \quad \text{и вынесем за скобки } u(x) \text{ в двух последних слагаемых}$$

$$\text{левой части } v(x) \frac{du}{dx} + u(x) \left[\frac{dv}{dx} + xv(x) \right] = x^2.$$



3-ий шаг. Приравняем выражение в квадратной скобке к нулю $\frac{dv}{dx} + xv(x) = 0$ и решим полученное уравнение методом разделения переменных, $v(x) = \frac{1}{x}$. Здесь произвольная константа интегрирования не пишется.

4-ый шаг. Подставляем найденную функцию в уравнение, полученное на 2-ом шаге, получаем уравнение для неизвестной функции $u(x)$: $\frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} = x^2$. Решаем его методом разделения

переменных: $du = x^3 dx$; $u(x) = \frac{x^4}{4} + C$. Заметим, что на этом шаге произвольная константа интегрирования записывается.

5-ый шаг. Выписываем ответ: $y(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C \right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$.

6. Найти решение задачи Коши для уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$: $y''' = 24x$,
 $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

Решение. После первого интегрирования получаем

$y''(x) = \int 24x dx + C_1 = 24 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$. После второго интегрирования найдем

$y'(x) = \int (12x^2 + C_1) dx = 12 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, наконец, после третьего интегрирования запишем общее решение

$$y(x) = \int (4x^3 + C_1 x + C_2) dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Используя полученные выражения для $y''(x)$, $y'(x)$ и $y(x)$ с помощью начальных условий найдем $C_1 = 4$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Решение задачи Коши имеет вид: $y(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + 3$.

Прикладная математика

Задача 1

Угол, измеренный теодолитом, оказался равным $22^\circ 20' 30'' \pm 30''$. Какова относительная погрешность измерения?

Решение. Абсолютная погрешность $\Delta = 30''$. Тогда относительная погрешность $\delta = \Delta \alpha = 30'' / 22^\circ 20' 30'' \cdot 100\% = 0,04\%$.



Задача 2

Сколько верных знаков содержит число $A=3,7563$, если относительная погрешность равна 1%?

Решение. Первая верная цифра есть 3, поэтому $0,01 \leq 12 \cdot 4(110) \cdot n^{-1}$, откуда $n=2$. Число A следует записать так: $A=3,8$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решение системы линейных алгебраических уравнений (ЛАУ) относится к одному из основных разделов многочисленных практических задач во всех отраслях науки и техники. Хотя задачи решения редко представляет самостоятельный интерес, но от умения эффективно решать такие системы часто зависит сама возможность математического моделирования самых разнообразных процессов с применением ЭВМ. Существует много методов решения ЛАУ. К основным из них относятся: – Метод Гаусса. Вычисления с помощью метода Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из системы как при прямом, так и обратном преобразовании. Наиболее часто применяется тот случай, когда матрица A -квадратная и не особая. – Метод Крамера. $X = I / i$ ($i=1, 2, \dots, n$). – Матричный метод. $AX=B$, $X=A^{-1}B$ Основные практические рекомендации: – Метод Гаусса эффективен при решении ЛАУ на ЭВМ; – Метод Крамера желательно применять в решении задач с параметрами; – Метод обратной матрицы рекомендуется применять при решении матричных задач разного профиля.

Критерии и шкала оценивания:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если задача решена полностью в соответствии с алгоритмом, сделан анализ полученного решения, и сделаны выводы о целесообразности использования модели в практике.

Оценка «хорошо» -выставляется студенту, если задача решена полностью в соответствии с алгоритмом, анализ полученного решения

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если задача решена не полностью, но в соответствии с алгоритмом

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если задача не решена. Оценка выставляется в журнале посещаемости студентов

3.6. Тесты

Проверяемые компетенции:



Код и наименование общепрофессиональн ой компетенции	Код и наименование индикатора достижения общепрофессиональной компетенции
ОПК-1. <i>Способен решать производственные и (или) исследовательские задачи профессиональной деятельности на основе фундаментальных знаний в области геодезии</i>	ОПК-1.1 - Демонстрирует способность решения задач профессиональной деятельности на основе математических и естественнонаучных знаний; ОПК-1.2 - Применяет принципиальные особенности математического моделирования объектов, процессов и явлений при решении задач в области геодезии и дистанционного зондирования; ОПК – 1.3 Использует математические и естественнонаучные знания для решения задач профессиональной деятельности

Примерные тестовые задания контроля знаний студентов приведены в таблице 3.1.

Критерии и шкала оценки тестовых заданий

<u>Критерии оценки:</u> Уровень овладения компетенциями в т.ч. - Полнота знаний теоретического контролируемого материала. - Количество правильных ответов.	Кол. правильных ответов, обеспечивающих получение:			
	Зачета	Оценки за экзамен или дифференцированный зачет		
		удовлетво рительно	хорошо	отлично
Оцениваемый показатель	<i>От 55% и выше правильны х ответов</i>	<i>55% и более правильны х ответов</i>	<i>70% и более правильных ответов</i>	<i>85% и более правильны х ответов</i>
Количество тестовых заданий:				
15	8	От 8 до 11	От 11 до 13	13 и более
20	11	От 11 до 14	От 14 до 17	17 и более
25	13	От 13 до 18	От 18 до 21	21 и более
26	14	От 14 до 18	От 18 до 22	22 и более
30	16	От 16 до 21	От 21 до 26	26 и более



40	22	От 22 до 28	От 28 до 34	34 и более
----	----	----------------	-------------	------------

3.7 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций по дисциплине «Математика» проводится в форме текущей, рубежной и итоговой (промежуточной) аттестации.

Контроль текущей успеваемости обучающихся – текущая аттестация – проводится в ходе семестра с целью определения уровня усвоения обучающимися знаний; формирования у них умений и навыков; своевременного выявления преподавателем недостатков в подготовке студентов и принятия необходимых мер по ее корректировке; совершенствованию методики обучения; организации учебной работы и оказания обучающимся индивидуальной помощи.

К контролю текущей успеваемости относятся проверка знаний, умений и навыков обучающихся:

- на занятиях;
- по результатам написания коллоквиумов;
- по результатам выполнения тестирования;
- по результатам написания самостоятельных работ;
- по результатам проверки качества конспектов лекций и иных материалов;
- по результатам отчета обучающихся в ходе индивидуальной консультации преподавателя, проводимой в часы самоподготовки, по имеющимся задолженностям.

Контроль за выполнением студентами каждого вида работ может осуществляться поэтапно и служит основанием для предварительной и рубежной аттестации по дисциплине.

Рубежная аттестация обучающихся проводится преподавателем в целях подведения промежуточных итогов текущей успеваемости студентов, анализа состояния учебной работы, выявления неуспевающих, ликвидации задолженностей.

К рубежному контролю относятся проверка знаний, умений и навыков обучающихся:

- по результатам проведения рубежного контроля уровня усвоения знаний (с помощью расчетно-графических работ и контрольных работ);

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится с целью выявления соответствия уровня теоретических знаний, практических умений и навыков по дисциплине «Математика» требованиям ФГОС ВО по



направлению подготовки (специальности) «Прикладная геодезия» в форме экзамена.

Экзамен проводится после завершения изучения дисциплины в объеме рабочей учебной программы. Форма проведения экзамена определяется кафедрой (устный – по билетам, либо путем собеседования по вопросам; письменная работа, тестирование и др.). Оценка по результатам экзамена – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Все виды текущего и рубежного контроля осуществляются на практических занятиях.

Каждая форма контроля по дисциплине включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень освоения студентами знаний и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и навыков.

Процедура оценивания компетенций обучающихся основана на следующих стандартах:

1. Периодичность проведения оценки (на каждом занятии).
2. Многоступенчатость: оценка (как преподавателем, так и студентами группы) и самооценка обучающегося, обсуждение результатов и комплекса мер по устранению недостатков.
3. Единство используемой технологии для всех обучающихся, выполнение условий сопоставимости результатов оценивания.
4. Соблюдение последовательности проведения оценки: предусмотрено, что развитие компетенций идет по возрастанию их уровней сложности, а оценочные средства на каждом этапе учитывают это возрастание.

Краткая характеристика процедуры реализации текущего и итогового контроля по дисциплине для оценки компетенций обучающихся представлена в таблице:

№ п/ п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика процедуры оценивания компетенций	Представление оценочного средства в фонде
1. 1	Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
2. 2	Разноуровневые задачи и задания	Выполняются на практических занятиях по темам. а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического	Комплект типовых задач



		материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей.	
3. 3	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися	Вопросы по темам/разделам дисциплины
4.	Тест	Проводится семинарских занятиях. Позволяет оценить уровень знаний студентами теоретического материала по дисциплине. Осуществляется на бумажных или электронных носителях по вариантам. Количество вопросов в каждом варианте определяется преподавателем. Отведенное время на подготовку определяет преподаватель.	Фонд тестовых заданий
5.	Экзамен	Проводится в заданный срок, согласно графику учебного процесса. При выставлении оценок учитывается уровень приобретенных компетенций студента. Компонент «знать» оценивается теоретическими вопросами по содержанию дисциплины, компоненты «уметь» и «владеть» - практикоориентированными заданиями. Аудиторное время, отведенное студенту, на подготовку -	Комплект вопросов к зачету, экзамену



60 мин.

4. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) «Математика» включает:

- перечень компетенций, планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы и этапы их формирования;
- описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования;
- описание шкал оценивания;
- критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций;
- методические материалы, определяющие процедуры оценивания;
- типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения (промежуточной аттестации) по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции(ий).

Фонд оценочных средств по дисциплине «Математика» представлен в приложении 1.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник / В.С. Шипачев. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 479 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5394. - ISBN 978-5-16-010072-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1185673>
2. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие / В. С. Шипачев. — 10-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 304 с. — (Высшее образование). - ISBN 978-5-16-010071-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1042456>
3. Шипачев В.С.. Высшая математика [Текст] : учебник для вузов / Шипачев В.С. - 7-е изд., стереотип. - М. : Высш.шк, 2005. - 479с.
4. Шипачев В.С.. Задачник по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Шипачев В.С. - 5-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2005. - 303с.

Дополнительная литература



1. Элементы линейной алгебры и их применение при решении практических задач : учеб. пособие для студентов I курса всех специальностей / Гос. ун-т по землеустройству, Каф. высш. математики и физики ; Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина, П.В. Макаров, В.В. Кузнецов. - М. : ГУЗ, 2016. - 62 с.

2. Комплексные числа. Понятие функции комплексного переменного [Текст] : учеб. пособие для студентов 1-го и 2-го курсов всех специальностей / П.В. Макаров, Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина, В.П. Иванов, Н.В. Семенова ; Гос. ун-т по землеустройству, Каф. высш. математики и физики. - М. : ГУЗ, 2017. - 46 с.

3. Интегральное исчисление. Определенный интеграл : учеб. пособие: для студентов 1-го и 2-го курсов всех специальностей и всех форм обучения. Ч.2 / Гос. ун-т по землеустройству, Каф. высшей математики и физики ; сост.: Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина, П.В. Макаров. - М. : ГУЗ, 2018. - 50 с

4. Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл : учеб. пособие для студентов 1-го и 2-го курсов всех спец. и всех форм обучения / Гос. ун-т по землеустройству, Каф. высш. математики и физики ; авт.-сост. Н.А. Кузнецова, К.В. Курочкина. - М. : ГУЗ, 2018. - 69 с.

5. Элементы теории множеств и математической логики : учеб. пособие для студентов 1-го и 2-го курсов / Гос. ун-т по землеустройству, Каф. высш. математики и физики ; авт.-сост. Н.А. Кузнецова, А.В. Червяков, А.А. Хасанов. - М. : ГУЗ, 2019. - 45 с.

6. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Интегрирование функций одной переменной. Функции многих переменных. Ряды: учеб. пособие /И.А. Соловьев [и др.].-СПб.: Лань, 2009.- 287 с.

7. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Кратные интегралы. Теория поля. Теория функций комплексного переменного. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие /И.А. Соловьев [и др.].-СПб.: Лань,2009.- 445 с.

8. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Производная и ее приложения: учеб. пособие/И.А. Соловьев [и др.].-2009.- 329 с.

6. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 6.1 – Описание информационных ресурсов необходимых для освоения дисциплины

№	Адрес сайта и его	Перечень материалов представленных на			
← ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 91	



	описание	сайте
1.	http://fm.cdml.ru Сайт кафедры высшей математики и физики ГУЗ	Авторские разработки коллектива кафедры в области методик преподавания основных разделов математических и физических дисциплин, методические указания и контрольные задания по решению расчетно-графических и контрольных работ, авторские лабораторные практикумы, с методическими рекомендациями по их выполнению, решению и оформлению.
3.	www.znanium.com.ru / издательство ИНФРА-М	Коллекция электронных версий изданий (книг, журналов, статей и пр.), сгруппированных по тематическим и целевым признакам.
4.	ЭБС «ЮРАЙТ» (www.biblio-online.ru)	Виртуальная библиотека

7. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Информационные технологии:

- сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- самостоятельный поиск дополнительного учебного и научного материала, с использованием поисковых систем и сайтов сети Интернет, электронных энциклопедий и баз данных;
- использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

Информационные справочные системы

В ходе реализации целей и задач по дисциплине обучающиеся могут при необходимости использовать возможности информационно-справочных систем, электронных библиотек и архивов.

Информационно-справочные и информационно-правовые системы: информационно-справочные и поисковые системы Yandex, Google.

Профессиональные базы данных: Справочно-правовая система «КонсультантПлюс», Справочно-правовая система «Гарант»

Электронно-библиотечные системы (ЭБС):

№	Адрес сайта и его описание	Перечень материалов представленных на сайте
1	https://e.lanbook.com/	Электронно- библиотечная



		система «Издательство Лань»
2	http://znanium.com/	Электронно- библиотечная система ZNANIUM.COM
3	https://www.biblio-online.ru/	Электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ»
4	http://www.iprbookshop.ru/	Электронно-библиотечная система IPR BOOKS
5	https://guz.bibliotech.ru	Электронно-библиотечная система ГУЗ

8. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Для материально-технического обеспечения дисциплины «Математика» используются:

Аудитория 3001 для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, курсового проектирования, групповых и индивидуальных консультаций, для текущего контроля и промежуточной аттестации, занятий практического типа:

Рабочее место преподавателя. Рабочие места обучающихся Доска. Проектор, экран. Ноутбук ASUS K501U. Microsoft Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО).

Аудитория 3012 для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, курсового проектирования, групповых и индивидуальных консультаций, для текущего контроля и промежуточной аттестации, занятий практического типа:

Рабочее место преподавателя. Рабочие места обучающихся. Стационарный мультимедийный проектор. Доска. Ноутбук ASUS X553M. Microsoft Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО).

Аудитории - помещения для самостоятельной работы обучающихся, имеется подключение к сети «Интернет» и доступ в электронную информационно-образовательную среду:

Аудитория 10-1 (Читальный зал). Рабочие места студентов. Компьютеры 12 шт. Microsoft Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО). Доступна вся учебная и методическая литература, включая доступ к ЭБС.

Аудитории 204-207, 209, 211 (компьютерные классы) для проведения занятий семинарского типа, курсового проектирования, групповых и индивидуальных консультаций, для текущего контроля и промежуточной аттестации, занятий практического типа:

Рабочее место преподавателя. Рабочие места обучающихся. Проекционная панель LG 43UK6390PLG – 1 шт., стационарный компьютер – 9 шт. Моноблок – 1



шт. Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО), Autodesk Education 2019 (Autodesk AutoCAD, Autodesk Revit Architect, Autodesk Civil 3D, Autodesk 3ds MAX – академические лицензии), GRAPHISOFT (ArchiCad 24 Russian, Базовый BIMcloud, MEP Modeler – академические лицензии), Adobe Photoshop, CorelDRAW.

Аудитория 34: Рабочее место преподавателя. Рабочие места обучающихся. Сканер – 2 шт. Компьютер – 12 шт. Microsoft Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), CredoDAT, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО).

9. ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

Профессорско-педагогический состав знакомится с психолого-физиологическими особенностями обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, индивидуальными программами реабилитации инвалидов (при наличии). При необходимости осуществляется дополнительная поддержка преподавания тьюторами, психологами, социальными работниками, прошедшими подготовку ассистентами.

В соответствии с методическими рекомендациями Минобрнауки РФ (утв. 8 апреля 2014 г. N АК-44/05вн) в курсе предполагается использовать социально-активные и рефлексивные методы обучения, технологии социокультурной реабилитации с целью оказания помощи в установлении полноценных межличностных отношений с другими студентами, создании комфортного психологического климата в студенческой группе. Подбор и разработка учебных материалов производятся с учетом предоставления материала в различных формах: аудиальной, визуальной, с использованием специальных технических средств и информационных систем.

Медиа материалы также следует использовать и адаптировать с учетом индивидуальных особенностей обучения лиц с ОВЗ.

Освоение дисциплины лицами с ОВЗ осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения (персонального и коллективного использования). Материально-техническое обеспечение предусматривает приспособление аудиторий к нуждам лиц с ОВЗ.

Форма проведения аттестации для студентов-инвалидов устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей. Для студентов с ОВЗ предусматривается доступная форма предоставления заданий оценочных средств, а именно:

- в печатной или электронной форме (для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата);



- в печатной форме или электронной форме с увеличенным шрифтом и контрастностью (для лиц с нарушениями слуха, речи, зрения);

- методом чтения ассистентом задания вслух (для лиц с нарушениями зрения).

Студентам с инвалидностью увеличивается время на подготовку ответов на контрольные вопросы. Для таких студентов предусматривается доступная форма предоставления ответов на задания, а именно:

- письменно на бумаге или набором ответов на компьютере (для лиц с нарушениями слуха, речи);

- выбором ответа из возможных вариантов с использованием услуг ассистента (для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата);

- устно (для лиц с нарушениями зрения, опорно-двигательного аппарата).

При необходимости для обучающихся с инвалидностью процедура оценивания результатов обучения может проводиться в несколько этапов.



Приложение 1: к рабочей программе дисциплины:

Математика

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ по дисциплине:

Математика

по специальности:

21.05.01 Прикладная геодезия



Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) **Математика** включает:

- перечень компетенций, планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы и этапы их формирования;
- описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования;
- описание шкал оценивания;
- критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций;
- методические материалы, определяющие процедуры оценивания;
- типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения (промежуточной аттестации) по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции(ий).

1. Перечень компетенций, планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы и этапы их формирования

Рабочая программа дисциплины (модуля) определяет перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Компетенция		Индикаторы компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине), характеризующие этапы формирования компетенций	
Код	Содержание компетенции (или её части)			
ОПК-1	Способен решать производственные и исследовательские задачи профессиональной деятельности на основе фундаментальных знаний в области геодезии	ОПК-1.1 - Демонстрирует способность решения задач профессиональной деятельности на основе математических и естественнонаучных знаний	В области знания и понимания (А) - знать	
			Знать	Основы методов математического моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2)
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь	
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2)
			В области практических навыков (С) - владеть навыками	
		ОПК-1.2 -	Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (С 1)
		ОПК-1.2 -	В области знания и понимания (А) - знать	



Компетенция		Индикаторы компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине), характеризующие этапы формирования компетенций	
Код	Содержание компетенции (или её части)			
		Применяет принципиальные особенности математического моделирования объектов, процессов и явлений при решении задач в области геодезии и дистанционного зондирования	Знать	Основы методов математического моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2)
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь	
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2)
			В области практических навыков (С) - владеть навыками	
	ОПК – 1.3 Использует математические и естественнонаучные знания для решения задач профессиональной деятельности		Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (С 1)
			В области знания и понимания (А) - знать	
			Знать	Основы методов математического моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2)
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь	
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2)
			В области практических навыков (С) - владеть навыками	
			Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (С 1)

В рабочей программе дисциплины (модуля) этапы формирования компетенций определены тематическим планом.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

В качестве показателей оценивания компетенций на различных этапах их формирования в университете определены следующие средневзвешенные уровни сформированности компетенций в которых



участвует дисциплина:

- ✓ повышенный;
- ✓ базовый;
- ✓ пороговый;
- ✓ недостаточный.

Критерии оценивания компетенций (признак, на основании которого, проводится оценка по выбранному показателю):

Таблица 1

показатель оценивания компетенций	результат обучения	критерии оценивания компетенций
повышенный	Знать	Обучающийся продемонстрировал: глубокие исчерпывающие знания и понимание программного материала; содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все вопросы, включая дополнительные; свободное владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой
	Уметь	Обучающийся продемонстрировал: понимание программного материала; умение свободно решать практические контрольные задания (ситуационные задачи, краткие формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить или описание результата, который нужно получить и др); логически последовательные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы (решения) на все поставленные задания (вопросы), включая дополнительные; свободное владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой
	Владеть	Обучающийся продемонстрировал: понимание программного материала; умение свободно решать комплексные практические задания (решения задач по нестандартным ситуациям (подготовки или экспертизы документов, решения задач анализа и оценки и т.п.); успешно защитил индивидуальный или групповой проект или портфолио, при наличии объективных практических результатов, характеризующих уровень сформированности компетенции(ий); логически последовательные, полные, правильные и конкретные ответы в ходе защиты задания (проекта, портфолио), включая дополнительные уточняющие вопросы (задания); свободное владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой
	Знать	Обучающийся продемонстрировал: твердые и достаточно полные знания программного материала; правильное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений; последовательные, правильные, конкретные ответы на поставленные вопросы при свободном устранении замечаний по отдельным вопросам; достаточное владение литературой, рекомендованной учебной программой



базовый	Уметь	Обучающийся продемонстрировал: понимание программного материала; умение решать практические контрольные задания (ситуационные задачи, краткие формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить или описание результата, который нужно получить и др.); логически последовательные, правильные и конкретные ответы (решения) на основные задания (вопросы), включая дополнительные; устранение замечаний по отдельным элементам задания (вопроса); владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой
	Владеть	Обучающийся продемонстрировал: понимание программного материала; умение решать комплексные практические задания (решения задач по нестандартным ситуациям (подготовки или экспертизы документов, решения задач анализа и оценки и т.п.); достаточно успешно защитил индивидуальный или групповой проект или портфолио, при наличии практического результата, характеризующего уровень сформированности компетенции; продемонстрировал логически последовательные, достаточно полные, правильные ответы в ходе защиты задания (проекта, портфолио), включая дополнительные; самостоятельно устранил замечания по отдельным элементам задания (вопроса); владение основной и дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой
пороговый	Знать	Обучающийся продемонстрировал: твердые знания и понимание основного программного материала; правильные, без грубых ошибок, ответы на поставленные вопросы при устранении неточностей и несущественных ошибок в освещении отдельных положений при наводящих вопросах преподавателя; недостаточно полное владение литературой, рекомендованной учебной программой
	Уметь	Обучающийся продемонстрировал: понимание основного программного материала; умение, без грубых ошибок, решать практические контрольные задания (ситуационные задачи, краткие формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить или описание результата, который нужно получить и др.); правильные, без грубых ошибок, ответы (решения) на основные задания (вопросы), включая дополнительные, устранение, при наводящих вопросах преподавателя, замечаний по отдельным элементам задания (вопроса); недостаточно полное владение литературой, рекомендованной учебной программой
	Владеть	Обучающийся продемонстрировал: понимание основного программного материала; умение, без грубых ошибок, решать комплексные практические задания (решения задач по нестандартным ситуациям (подготовки или экспертизы документов, решения задач анализа и оценки и т.п.); защитил, с устранением ошибок, индивидуальный или групповой проект или портфолио, при наличии практического результата, характеризующего уровень сформированности компетенции; без грубых ошибок дал ответы на поставленные вопросы при устранении неточностей и ошибок в решениях в ходе защиты задания (проекта, портфолио) при наводящих вопросах преподавателя; недостаточно полное владение литературой, рекомендованной учебной программой



недостаточный	Знать	Обучающийся продемонстрировал: неправильные ответы на основные вопросы; грубые ошибки в ответах; непонимание сущности излагаемых вопросов; неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы; не владеет основной литературой, рекомендованной учебной программой
	Уметь	Обучающийся продемонстрировал: непонимание основного программного материала; неумение решать практические контрольные задания (ситуационные задачи, краткие формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить или описание результата, который нужно получить и др.); не дал правильные ответы (решения) на основные задания (вопросы), включая дополнительные; не устранил, при наводящих вопросах преподавателя, замечания и грубые ошибки по заданию (вопросу); не владеет основной учебной литературой, рекомендованной учебной программой
	Владеть	Обучающийся продемонстрировал: непонимание основного программного материала; неумение, решать комплексные практические задания (решения задач по нестандартным ситуациям (подготовки или экспертизы документов, решения задач анализа и оценки и т.п.); не смог защитить индивидуальный или групповой проект или портфолио, при наличии грубых ошибок дал неправильные ответы на поставленные вопросы при устранении неточностей и ошибок в решениях в ходе защиты задания (проекта, портфолио) при наводящих вопросах преподавателя; не владеет основной учебной литературой, рекомендованной учебной программой

3. Описание шкал оценивания

При проведении промежуточной аттестации в университете используются традиционные формы аттестации:

<i>Форма промежуточной аттестации</i>	<i>Шкала оценивания</i>
ЗАЧЕТ	"зачтено", "не зачтено"
ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ (дифференцированный зачет)	"отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно"
ЭКЗАМЕН	"отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно"

4. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде **ЗНАНИЙ** используются следующие процедуры и технологии:

- устный ответ на вопрос(ы) или индивидуальное собеседование,



- письменные ответы на вопрос(ы).
- тестирование и т.п.

Для оценивания результатов обучения в виде УМЕНИЙ и ВЛАДЕНИЙ используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания (далее - ПКЗ), включающих одну или несколько задач (вопросов) в виде краткой формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить, или описание результата, который нужно получить.

По сложности ПКЗ разделяются на:

- простые задания (далее - простые ПКЗ);
- комплексные задания (далее - комплексные ПКЗ).

Для оценивания УМЕНИЙ - применяются простые ПКЗ.

Простые ПКЗ предполагают решение в одно или два действия. К ним можно отнести: простые ситуационные задачи с коротким ответом или простым действием; несложные задания по выполнению конкретных действий.

Для оценивания ВЛАДЕНИЙ - применяются комплексные ПКЗ.

Комплексные задания требуют многоходовых решений как в типичной, так и в нестандартной ситуациях. Это задания в открытой форме, требующие поэтапного решения и развернутого ответа, в т.ч. задания на индивидуальное или коллективное выполнение проектов, на выполнение практических действий или лабораторных работ.

Типы практических контрольных заданий:

- задания на установление правильной последовательности, взаимосвязанности действий, выяснения влияния различных факторов на результаты выполнения задания;
- установление последовательности (описать алгоритм выполнения действия),
- нахождение ошибок в последовательности (определить правильный вариант последовательности действий);
- указать возможное влияние факторов на последствия реализации умения и т.д.
- задания на принятие решения в нестандартной ситуации (ситуации выбора, многоальтернативности решений, проблемной ситуации);
- задания на оценку последствий принятых решений;
- задания на оценку эффективности выполнения действия и т.п.

Примечание 1. Если дисциплина (модуль) завершает освоение какой-то компетенции, то критерии и процедуры оценивания формируются под итоговый контроль освоения данной компетенции.



В целях итогового контроля сформированности компетенции используются:

- защиты индивидуальных или групповых проектов;
- оформление и защита отчетов по комплексным практическим работам;
- защита (презентация) портфолио, при наличии объективных практических результатов внеаудиторной активности обучаемого по профилю дисциплины, характеризующих уровень сформированности компетенции(ий) и т. п.

Мнемоническое правило

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю); ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ: "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно"				ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ
	"ОТЛИЧНО"	"ХОРОШО"	"УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО"	"НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО"	
Знать_____	см. ТАБЛИЦУ 1 критерий ПОВЫШЕННЫЙ для Знать	см ТАБЛИЦУ 1. критерий. БАЗОВЫЙ для Знать	см. ТАБЛИЦУ 1 критерий ПОРОГОВЫЙ для Знать	см ТАБЛИЦУ 1. критерий. НЕДОСТАТОЧНЫЙ для Знать	- устный ответ; - собеседование; - - выполнение тестов и т.п.
Уметь_____	см. ТАБЛИЦУ 1 критерий ПОВЫШЕННЫЙ для Уметь	см ТАБЛИЦУ 1. критерий. БАЗОВЫЙ для Уметь	см. ТАБЛИЦУ 1 критерий ПОРОГОВЫЙ для Уметь	см ТАБЛИЦУ 1. критерий. НЕДОСТАТОЧНЫЙ для Уметь	- выполнение простого (х)ПКЗ и т.п.
Владеть Итоговый контроль сформированности компетенции	см. ТАБЛИЦУ 1 критерий ПОВЫШЕННЫЙ для Владеть	см ТАБЛИЦУ 1. критерий. БАЗОВЫЙ для Владеть	см. ТАБЛИЦУ 1 критерий ПОРОГОВЫЙ для Владеть	см ТАБЛИЦУ 1. критерий. НЕДОСТАТОЧНЫЙ для Владеть	- выполнение комплексного ПКЗ; - защита проекта; - защита портфолио и т.п.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

При организации и проведении промежуточной аттестации, исходя из перечня планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), по каждой компетенции или связанным несколькими компетенциям, в формировании которых участвует учебная дисциплина (модуль), кафедрой формируются **фонд оценочных средств к экзамену** (соответственно - дифференцированному зачету или зачету):

- **примерный перечень вопросов к экзамену** (соответственно диф.



зачету, зачету) для оценивания результатов обучения в виде ЗНАНИЙ. При этом, за каждым вопросом в скобках указываются(ется) компетенции(я), уровень сформированности которых(ой) будет оцениваться;

- **примерный перечень простых практических контрольных заданий к экзамену** (соответственно - *диф. зачету или зачету*) для оценивания результатов обучения в виде УМЕНИЙ. При этом, за каждым заданием в скобках указываются(ется) компетенции(я), уровень сформированности которых(ой) будет оцениваться;

- **примерный перечень комплексных практических контрольных заданий к экзамену** (соответственно - *диф. зачету или зачету*) для оценивания результатов обучения в виде ВЛАДЕНИЙ. при этом, за каждым заданием в скобках указываются(ется) компетенции(я), уровень сформированности которых(ой) будет оцениваться;

Примечание 2. Если дисциплина (модуль) не завершает освоение хотя бы одной компетенции, то комплексное ПКЗ может быть заменено простым ПКЗ. В таком случае перечень комплексных ПКЗ по данной дисциплине кафедрой не формируется, а разрабатывается:

- **примерный перечень практических контрольных заданий к экзамену** (соответственно - *диф. зачету или зачету*) для оценивания результатов обучения в виде ВЛАДЕНИЙ. При этом, за каждым заданием в скобках указываются(ется) компетенции(я), уровень сформированности которых(ой) будет оцениваться.

Для проведения промежуточной аттестации, исходя из сформированных перечней (вопросов к экзамену, простых ПКЗ, комплексных ПКЗ) формируются билеты к экзамену (соответственно - *диф. зачету или зачету*).

Примечание 3. Сформированные перечни (вопросы к экзамену, простые ПКЗ, комплексные ПКЗ) должны в совокупности охватывать все компетенции и заявленные в программе основные результаты обучения по дисциплине (модулю) на уровне ЗНАТЬ, УМЕТЬ, ВЛАДЕТЬ.

Билеты формируются случайной выборкой из приведенных выше перечней, а итоговый результат оценивания соотносится на весь заявленный в программе перечень результатов обучения по дисциплине (модулю).

Каждый билет включает:

1. Вопрос для оценивания результатов обучения в виде ЗНАНИЙ;
2. Простое практическое контрольное задание для оценивания результатов обучения в виде УМЕНИЙ;
3. Комплексное практическое контрольное задание для оценивания результатов обучения в виде ВЛАДЕНИЙ. (см. Примечание 2)

Методика оценивания: при проведении промежуточной аттестации, как правило, применяется среднее арифметическое значения оценок, полученных за



каждый элемент оценивания, указанный в билете (вопрос и два практических задания).

Итоговая оценка по дисциплине (модулю) рассчитывается как отношение суммы оценок, полученных обучаемым за каждый вопрос и задания в билете (вопрос и 2 задания, далее - элемент контроля) поделенное на количество полученных оценок (3).

При проведении оценивания по вопросам и заданиям, указанным в билете, в ходе промежуточной аттестации, преподаватель может учитывать результаты текущего контроля.

Устанавливаются следующие **шкалы оценивания** уровней освоения компетенций, предусмотренных рабочей программой **при проведении экзамена и дифференцированного зачета:**

«**ПОВЫШЕННЫЙ**» - выставляется оценка - 5 «**ОТЛИЧНО**», если среднее арифметическое значение оценок по элементам контроля находится в интервале от 4.5-5.0;

«**БАЗОВЫЙ**» - выставляется оценка - 4 «**ХОРОШО**», если среднее арифметическое значение оценок по элементам контроля находится в интервале от 3.5 - 4.4;

«**ПОРОГОВЫЙ**» - выставляется оценка - 3 «**УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО**», если среднее арифметическое значение оценок по элементам контроля находится в интервале от 2.5 - 3.4.

«**НЕДОСТАТОЧНЫЙ**» - выставляется оценка - 2 «**НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО**», если среднее арифметическое значение оценок по элементам контроля менее 2.5.

При проведении зачета: если достигнут один из показателей: «**ПОВЫШЕННЫЙ**», «**БАЗОВЫЙ**» или «**ПОРОГОВЫЙ**» - выставляется оценка «**ЗАЧТЕНО**», если среднее арифметическое значение оценок находится в интервале от 2.5-5.0. В противном случае: если достигнут показатель «**НЕДОСТАТОЧНЫЙ**.» - выставляется оценка «**НЕЗАЧТЕНО**», если среднее арифметическое значение оценок по элементам контроля менее 2.5

6. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения (промежуточной аттестации) по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции

6.1 Примерный перечень вопросов к экзамену/зачета для оценивания результатов обучения в виде ЗНАНИЙ

№	Вопрос	Индикатор компетенции
	Матрицы и действия с ними: сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, произведения матриц. Определители, их свойства, вычисление.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3.



Обратная матрица. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Матричный метод. Декартова и полярная системы координат. Определение вектора. Координаты. Операции над векторами и их свойства. Разложение вектора по базису Скалярное произведение векторов, его свойства. Вывод формулы длины вектора и угла между векторами. Условия коллинеарности, ортогональности и компланарности в координатной форме. Векторное и смешанное произведения, Вычисление, применение. Прямая линия на плоскости и ее уравнения. Уравнения плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и расстояния от точки до плоскости. Кривые второго порядка, определения и канонические уравнения в декартовой системе координат. Поверхности второго порядка. Вещественные и комплексные числа. Основные понятия числовой последовательности Предел числовой последовательности. Геометрический смысл. Понятие функции. Основные свойства функций. Основные элементарные функции. Сложная функция. Обратная функция. Предел функции (определение, основные теоремы, свойства пределов). Бесконечно малая и бесконечно большая величины. Непрерывность функции в точке. Пределы функции справа и слева. Монотонная функция. Точки разрыва функции. Функции, непрерывные на отрезке. Основные теоремы о непрерывных функциях. Первый замечательный предел.	
---	--



Число e. Второй замечательный предел. Эквивалентность бесконечно малых функций. Ряд эквивалентности. Производная функции. Задачи, приводящие к понятию производной (задача о мгновенной скорости, задача об угле наклона касательной к кривой). Основные правила дифференцирования. Таблица производных элементарных функций. Раскрытие неопределённостей, правило Лопиталя. Дифференциал функции. Приближённые вычисления с помощью дифференциала. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Монотонность функции. Критерии возрастания и убывания функции на интервале. Локальный экстремум. Необходимые и достаточные критерии локальных экстремумов. Выпуклость кривой. Точка перегиба. Асимптоты графика кривой. Уравнения касательной и нормали в точке касания. Неопределённый интеграл. Первообразная. Правила интегрирования. Теорема об инвариантности неопределённого интеграла. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и замена переменной. Интегрирование рациональных дробей. Определённый интеграл. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Задача о площади криволинейной трапеции. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Задача о длине пройденного пути. Вычисление площади криволинейного сектора. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной	
---	--



кривыми, заданными параметрически. Вычисление длины дуги плоской кривой. Вычисление объёма тела с помощью определённого интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Геометрический смысл несобственных интегралов с бесконечным пределом интегрирования. Интеграл Эйлера – Пуассона. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов первого рода. Признак Коши сходимости несобственных интегралов первого рода. Необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла первого рода. Абсолютная сходимость интеграла в промежутке $[a, +\infty)$. Признак Абеля. Признак Дирихле. Числовые ряды. Свойства сходимости числовых рядов. Необходимый признак сходимости рядов. Достаточные признаки сходимости (сравнение рядов; Даламбера; радикальный и интегральный признаки Коши) Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Степенные ряды, Теорема Абеля, Радиус сходимости. Разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки. Ряд Маклорена. Разложение в ряд элементарных функций. Приближенные вычисления с использованием рядов.	
--	--



Понятие о функциях нескольких переменных. Окрестность точки. Внутренние и граничные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Изолированные и предельные точки множества. Область определения функции нескольких переменных. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Градиент. функции нескольких переменных и его геометрический смысл. Производные высших порядков. Примеры Полный дифференциал ф. н. п. Необходимое условие дифференцируемости ф. н. п. Достаточное условие дифференцируемости ф. н. п. Производная сложной ф. н. п. Производная по направлению ф. н. п. Экстремум функции нескольких переменных. Нахождение точек экстремума ф. н. п. Определение криволинейного интеграла 1-го рода, его свойства, вычисление. Определение криволинейного интеграла 2-го рода, его свойства, вычисление. Определение и вычисление двойного интеграла, его свойства, применение. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах с помощью повторного интегрирования. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Формула Грина. Приложения двойных интегралов. Вычисление объемов тел и площади поверхности. Дать определение тройного интеграла и сформулировать его свойства. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах с помощью повторного интегрирования. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических	
--	--



координатах. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах. Поверхностный интеграл: определение, свойства, вычисление. Формула Остроградского. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение в полных дифференциалах. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Свойства решений. Определитель Вронского. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами Абсолютная и относительная погрешности. Значащие цифры и верные знаки приближенного числа. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Особенности машинной арифметики. Решение нелинейных уравнений. Теорема о существовании и единственного корня уравнения на отрезке. Способы локализации корней. Интервал	
---	--



	неопределенности корня и способ его оценки. Обусловленность задачи о нахождении корня уравнения. Способ определения числа обусловленности корня нелинейного уравнения по отношению к параметру. Методы уточнения корней нелинейного уравнения и их вычислительные особенности: скорость сходимости, априорная оценка числа итераций, трудоемкость, критерий окончания итерационного процесса. Методы бисекции, простых итераций и Ньютона. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Норма вектора и норма матрицы. Теоремы об обусловленности решений СЛАУ. Прямые методы решения СЛАУ и их вычислительные особенности: метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Метод наименьших квадратов (МНК). Варианты постановок задач об обработке экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Вывод системы нормальных уравнений. Линеаризация нелинейных зависимостей целью использования линейного МНК. Постановка задачи интерполяции. Теорема о существовании и единственности интерполяционного полинома. Полином Лагранжа. Численное интегрирование. Простые и составные формулы численного интегрирования. Погрешность усечения и вычислительная погрешность. Полная погрешность. Порядок точности метода. Оптимальный шаг интегрирования. Правило Рунге и численный критерий его применимости. Автоматический выбор шага	
--	--	--



	интегрирования. Численное дифференцирование. Формулы численного дифференцирования: левая, правая и центральные разностные производные первого порядка. Вторая разностная производная. Погрешность усечения и вычислительная погрешность. Полная погрешность. Порядок точности формулы численного дифференцирования. Оптимальный шаг численного дифференцирования.	

6.2 Примерный перечень простых практических контрольных заданий к экзамену/зачету для оценивания результатов обучения в виде УМЕНИЙ

№	ППЗ	Индикатор компетенции
	1. Найти определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. 2. Решите систему уравнений: 3. Найдите область определения функции: $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ 4. Найти: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$. 5. Найдите производные следующих функций: 1. a) $y = (e^x + 3x) \cos x$; b) $y = \ln(3^x - \frac{x}{8})$; 2. a) $y = \frac{4x^5}{8 + \sqrt[3]{x}}$; b) $y = \lg^8 x$; 6. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3



	7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{3x^2}$ и $y = \sqrt{4 - x^2}$. 8. Найти $\int x \cdot \cos x dx$. 9. Вычислить $\int_1^2 \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x+3)^3}} dx$. 10. Найти неопределённый интеграл $\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx$. 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$. 12. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$. 13. Исследовать на экстремум функцию $z = xy + 50/x + 20/y + 1$ в замкнутой области $D = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6; 1 \leq y \leq 3\}$.	
--	--	--

6.3. Примерный перечень комплексных практических контрольных заданий к экзамену/зачету для оценивания результатов обучения в виде **ВЛАДЕНИЙ**

№	КПЗ	Индикатор компетенции
	1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ 4. Исследовать на экстремум функцию $z = xy + 50/x + 20/y + 1$ в замкнутой области $D = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 6; 1 \leq y \leq 3\}$.	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3,
© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0
	Экземпляр №1	Стр. 18



	5. Постройте графики функций: a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; b) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ 6. Решить задачу. Точка движется прямолинейно согласно заданному закону движения, где S – путь (в м), t – время (в с.). Найдите скорость в момент $t = 2$с и ускорение в момент $t = 3$с. 7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (сделав рисунок): $y = 2 - x^2$, $y = x$. 8. Найдите экстремумы функции $Z = xy^2 - xy + xy^3 \quad (x > 0, y > 0)$ 9. Вероятность заказать такси по вызову в нужное время равна 0,8. Какое минимальное количество такси должно быть в таксомоторном парке, чтобы с вероятностью не менее 0,99 обеспечить вызов такси любым клиентом (хотя бы одна машина свободна). Если в таксомоторном парке 8 машин, то какова вероятность, что 5 из них свободны?	
--	---	--

6.4. Вариант билета к экзамену



ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Двойной интеграл. Определение. Свойства.
2. Найти сумму, произведение, частное двух комплексных чисел $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 5 - 2i$.
3. Найти общий вид частного решения неоднородного уравнения

$$y'' + y = 4e^x.$$