



Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Дворникова Татьяна Александровна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 28.05.2025 09:01:17
Уникальный программный ключ:
81e4612224154ba92346993825fd4bfa9a28f49d

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Государственный университет по землеустройству»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебной работе

/Л.П. Подболотова /

« 17 » мая 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.07 Высшая математика

(шифр и название дисциплины)

направление подготовки **20.03.01 Техносферная безопасность**

(шифр и название направления подготовки)

профиль **Охрана окружающей среды и ресурсосбережение**

уровень высшего образования **бакалавриат**

(бакалавриат, специалитет, магистратура)

квалификация **бакалавр**

(название)

Москва
2025



1. Рабочая программа дисциплины разработана на кафедре Высшей математики, физики и информатики ФГБОУ ВО ГУЗ в соответствии со следующими нормативными документами:

– Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденный приказом Минобрнауки России от 06.04.2021 №245.

– Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 25 мая 2020 г. N 680.

Рабочая программа дисциплины составлена в рамках основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) высшего образования и учитывает особенности обучения при инклюзивном образовании инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

2. Разработчики рабочей программы:

1. Доцент кафедры высшей математики и физики государственного университета по землеустройству, к.п.н. Курочкина К.В.,

2. Доцент кафедры высшей математики и физики государственного университета по землеустройству, к.ф-м.н. Кузнецова Н.А.

Рабочая программа дисциплины рассмотрена и одобрена на заседании кафедры Высшей математики, физики и информатики (протокол № 8 от 23.04.2025 г.).

Проверено



17.05.2025

зам. руководителя УМС
Олексенко О.М.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 2



1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, ЕЕ ОБЪЕМ И МЕСТО В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1 Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.

Цель учебной дисциплины заключается в получении обучающимися теоретических знаний для базовой математической подготовки бакалавров, позволяющих успешно решать современные прикладные задачи, а также формированию практических навыков и готовности к самостоятельной разработке и их применению в составе команды для решения задач в профессиональной сфере.

Задачи учебной дисциплины:

1. формирование понятий об основах математического аппарата, необходимого для решения практических задач;
2. освоение навыков математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык, нахождения подходящего метода решения задачи, умение пользоваться для ее решения вычислительной техникой, анализировать результаты решения и применять их на практике;
3. получение компетенций по самостоятельному изучению учебной и научной литературы по математике и ее приложениям;
4. формирование умений применять полученные знания в практической деятельности, решать практические задачи согласно приобретенным навыкам формулирования математических постановок задач, владения аналитическими и численными методами решения поставленных задач, а также владению методами математического моделирования с применением вычислительной техники.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы приведен в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Планируемые результаты обучения по дисциплине

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 3



Компетенция		Индикаторы компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине), характеризующие этапы формирования компетенций		
Код	Содержание компетенции (или её части)				
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Знает принципы поиска, отбора и обобщения информации	В области знания и понимания (А) - знать		
			Знать	Основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений теории (А 1) Основы методов математического моделирования (А 2) Основы обработки экспериментальных данных (А 3)	
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь		
			Уметь	Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности(В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2)	
			В области практических навыков (С) - владеть навыками		
			Владеть	Принципами математических рассуждений и доказательств (С 1)	
		УК-1.2 Умеет критически анализировать и синтезировать информацию для решения поставленных задач	В области знания и понимания (А) - знать		
			Знать	Основы методов математического моделирования и области их применения в исследованиях (А 1)	
			В области интеллектуальных навыков (В) - уметь		
			Уметь	Анализировать результаты задач (В1)	
			В области практических навыков (С) - владеть навыками		
			Владеть	Методами математического моделирования (С 1)	
ОПК-1	Способен учитывать	ОПК-1.2 Умение	В области знания и понимания (А) - знать		
			Знать	Основы методов математического	
© ГУЗ		Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 1



Компетенция		Индикаторы компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине), характеризующие этапы формирования компетенций	
Код	Содержание компетенции (или её части)			
	современные тенденции развития техники и технологий в области техносферной безопасности, измерительной и вычислительной техники, информационных технологий при решении типовых задач в области профессиональной деятельности, связанной с защитой окружающей среды и обеспечением безопасности человека	ориентироваться в основных методах обеспечения техносферной безопасности, используя основные виды измерительной и вычислительной техники при решении типовых задач профессиональной деятельности; определять параметры опасных и вредных воздействий технологических и производственных процессов; выявлять базовые законы и закономерности развития науки в области техносферной безопасности		моделирования (А 1) Основы обработки экспериментальных данных (А 2) В области интеллектуальных навыков (В) - уметь Уметь Применять математический аппарат и современные информационные технологии для поиска решений задач прикладной направленности (В 1) Анализировать результаты решения и применить их на практике (В2) В области практических навыков (С) - владеть навыками Владеть Принципами математических рассуждений и доказательств, методами математического моделирования и обработки эксперимента (С 1)

1.2 Место дисциплины в структуре образовательной программы.

Дисциплина «Высшая математика» - фундаментальная наука обязательной части (Б1.О.07) дисциплин подготовки студентов по направлению 20.03.01

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 2



«Техносферная безопасность» по профилю подготовки «Охрана окружающей среды и ресурсосбережение».

Дисциплина изучается на 1-ом и 2-ом курсах в 1-3 семестрах.

Логическая и содержательная связь дисциплин, участвующих в формировании компетенций, содержится в ниже представленной таблице:

Компетенция	Предшествующие дисциплины	Данная дисциплина	Последующие дисциплины
УК-1	Математика, физика, химия, биология, информатика (курс средней школы)	Высшая математика	Философия Экономика Информатика Химия Введение в профессиональную деятельность Цифровые технологии в ТБ Геоэкологические системы в инженерной защите ОС Анализ и основы моделирования экосистем Геоэкологическое моделирование Земли
ОПК-1	Математика, физика, химия, биология, информатика (курс средней школы)		Физика Химия Начертательная геометрия Инженерная графика Экология Метрология, стандартизация и сертификация Учебная ознакомительная практика (Экология)

1.3 Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоёмкость дисциплины «Высшая математика» составляет 10 зачётных единиц и 360 академических часов.

Объём дисциплины по видам учебных занятий (в часах)

Объём дисциплины	Всего часов		
	очная форма обучения	заочная формы обучения	очно-заочная форма обучения
Общая трудоемкость дисциплины	360		
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего)	172		
Аудиторная работа (всего):	172		



в т. числе:			
Лекции	70		
Семинары, практические занятия	82		
Лабораторные работы	20		
Курсовое проектирование	-		
Самостоятельная работа	134+54		
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)	Экз 1,3 Зчт 2		

2. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Содержание учебной дисциплины

Содержание дисциплины включает следующие разделы и темы:

Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1.1. Матрицы и действия над ними. Определители n -го порядка и их свойства. Способы вычисления определителей. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.

1.2. Метод Гаусса. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных алгебраических уравнений.

1.3. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.

1.4. Линейные векторные пространства. Сложение векторов и умножение вектора на число. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Координаты вектора в выбранном базисе. Длина вектора. Линейные операции в координатах.

1.5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрическая интерпретация. Координатное представление произведений векторов. Критерии коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов в координатной форме.

1.7. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости. Различные формы уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

1.8. Кривые второго порядка. Канонические виды кривых второго порядка (эллипсы, гиперболы и параболы).

Раздел 2. Элементы дискретной математики и математической логики

2.1. Основные понятия комбинаторики. Перестановки, размещения и сочетания.

Раздел 3. Введение в математический анализ

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 4



3.1. Предел функции. Односторонние пределы. Свойства пределов функций. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций. Первый и второй замечательные пределы.

3.2. Понятие непрерывности в точке. Определения разрывов первого и второго родов. Устранимые разрывы. Непрерывность элементарных функций. Асимптоты к графикам функций и способы их нахождения.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного

4.1. Производная функции в точке. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой. Физический смысл первой производной. Правила нахождения производной суммы, разности, произведения и отношения функций. Таблица производных основных элементарных функций.

4.2. Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной параметрически. Производная неявной функции. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

4.3. Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства.

4.4. Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа. Таблица разложений основных элементарных функций по формуле Маклорена.

4.5. Критерий монотонности дифференцируемых функций. Необходимое и достаточное условие экстремума. Критические точки первого рода. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

4.6. Определение выпуклости и вогнутости, точек перегиба. Применение второй производной к нахождению интервалов выпуклости и вогнутости. Критические точки второго рода.

4.7. Общая схема исследования функций и построения графиков.

Раздел 5. Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы

5.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.

5.2. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональностей.

5.3. Определение и основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 5



5.4 Применение определённых интегралов в геометрии и физике.

5.5 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций. Основные свойства. Признаки сходимости.

Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных

6.1. Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных.

6.2. Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал.

6.3. Градиент. Производная по направлению. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

6.4. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия. Условный экстремум.

Раздел 7. Числовые и функциональные ряды

7.1. Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости.

7.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения («эталонные» ряды); радикальный признак Коши; признак Даламбера; интегральный признак Коши-Маклорена. Знакопередающие ряды: признак Лейбница.

7.3. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Формула Даламбера для радиуса сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.

Раздел 8. Введение в теорию функций комплексного переменного

8.1. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Арифметические операции над комплексными числами. Корень n -ой степени из комплексного числа. Понятие о функции комплексного переменного.

Раздел 9. Кратные и криволинейные интегралы

9.1. Двойной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление двойного интеграла путем повторного интегрирования. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.

9.2. Тройной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление путем повторного интегрирования. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 6



- 9.3. Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение. Вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение. Вычисление. Формула Грина.

Раздел 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения

10.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Частное, общее и особое решения. Задача Коши. Понятие о теореме существования и единственности решения задачи Коши. Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными. Некоторые типы интегрируемых уравнений первого порядка. Линейные уравнения первого порядка. Однородные и сводящиеся к ним типы уравнений первого порядка.

10.2. Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях высших порядков. Постановка задачи Коши. Общее решение. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Некоторые частные виды уравнений.

10.3. Общие свойства линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.

10.4. Линейные уравнения n -ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного уравнения.

2.2 Структура учебной дисциплины

Таблица 2.1 – Структура учебной дисциплины для очной формы обучения

Названия содержательных разделов и тем учебной дисциплины	Кол-во часов						Индикатор компетенций	Признак компетенции
	очная							
	В том числе					всего		
	лек	пр	лаб	инд	СРС			
I семестр								
Линейная алгебра и аналитическая геометрия.	14	12	2			28	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Элементы дискретной математики и математической логики	2	1				3	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Введение в математический анализ.	6	3	4			13	УК-1.1 УК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1



							ОПК-1.2	A-1,2; B-1,2; C-1
Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного.	14	12	2			28	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Расчётно-графическая работа					9	9	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Экзамен					27	27		
Итого за семестр:	36	28	8		9	108		
II семестр								
Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы.	6	10	2		10	28	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных.	7	12	2		12	33	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Числовые и функциональные ряды.	5	8	2		10	25	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Расчётно-графическая работа					22	22		
Итого за семестр:	16	24	6		62	108		
III семестр								
Кратные интегралы. Криволинейные интегралы.	7	12	2		18	39	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Функции комплексного переменного.	2	2	2		5	11	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Обыкновенные дифференциальные уравнения.	9	16	2		18	45	УК-1.1 УК-1.2 ОПК-1.2	A-1,2,3;B-1,2; C-1 A-1;B-1; C-1 A-1,2; B-1,2; C-1
Расчётно-графическая работа					22	22		
Экзамен					27	27		
Итого за семестр:	18	30	6		63	144		
Итого за курс:	70	82	2 0		13 4+ 54	360		

**2.3 Распределение контактной работы**

Распределение контактной работы по видам занятий приведено в таблицах 2.3.-2.4.

Таблица 2.3 – Лекции, их содержание и объем в часах

№ лекции	№ темы	Наименование темы Содержание лекции	Трудо- емкость (час.)
I семестр			
1	1	Матрицы и действия над ними. Способы вычисления определителей. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.	2
2	1	Метод Гаусса. Ранг матрицы.	2
3	1	Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Структура общего решения неоднородной системы уравнений.	2
4	1	Линейные векторные пространства. Базис. Координаты вектора в выбранном базисе. Длина вектора. Линейные операции в координатах.	2
5	1	Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их основные свойства и геометрическая интерпретация. Координатное представление произведений векторов.	2
6	1	Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные формы уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	2
7	1	Кривые второго порядка. Канонические виды кривых второго порядка.	2
9	2	Основные понятия комбинаторики.	2
10	3	Предел функции. Свойства пределов функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций.	2
11	3	Понятие непрерывности в точке. Определения разрывов первого и второго родов. Устранимые	2



		разрывы. Непрерывность элементарных функций.	
12	4	Производная функции в точке. Таблица производных основных элементарных функций.	2
13	4	Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной параметрически.	2
14	4	Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства.	2
15	4	Правило Лопиталя.	2
16	4	Необходимое и достаточное условие экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.	2
17	4	Применение второй производной к нахождению интервалов выпуклости и вогнутости.	2
18	4	Общая схема исследования функций и построения графиков.	2
		Итого за I семестр:	36

II семестр

1	5	Первообразная. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой. Интегрирование рациональных дробей.	2
2-3	5	Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям. Применение определённых интегралов в геометрии и физике.	3
3	5	Несобственные интегралы.	1
4	6	Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных.	2
5	6	Полный дифференциал функции нескольких переменных. Градиент. Производная по направлению.	2
6	6	Частные производные и дифференциалы высших порядков.	1
6-7	6	Экстремумы функции нескольких переменных.	2
7	7	Понятие числового ряда. Частичные суммы. Сходимость числового ряда. Необходимый признак сходимости.	1
8	7	Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопередающиеся	1



		ряды: признак Лейбница.	
8	7	Радиус и интервал сходимости степенного ряда.	1
9	7	Ряды Тейлора и Маклорена.	2
		Итого за II семестр:	18
III семестр			
1	9	Двойной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление двойного интеграла путем повторного интегрирования. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.	2
2-3	9	Тройной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление путем повторного интегрирования. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.	3
3-4	9	Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение. Вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение. Вычисление. Формула Грина.	2
4	8	Комплексные числа. Действия над ними. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи.	1
5	8	Корень n-ой степени из комплексного числа. Понятие о функции комплексного переменного.	1
5-6	10	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Понятие о теореме существования и единственности решения задачи Коши. Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными. Линейные уравнения первого порядка. Однородные и сводящиеся к ним типы уравнений первого порядка.	3
7-8	10	Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях второго и высших порядков. Постановка задачи Коши. Общее решение. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.	3
8-9	10	Линейные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	3



		Нахождение частного решения.	
		Итого за III семестр:	18
		ВСЕГО:	72

Таблица 2.4 – Практические (или семинарские) и лабораторные занятия, их содержание и объем в часах

№ занятия	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
I семестр			
1	1	Матрицы и действия над ними. Способы вычисления определителей. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.	2
2	1	Метод Гаусса. Линейно зависимые и линейно независимые столбцы и строки матрицы. Ранг матрицы.	2
3	1	Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.	2
4	1	Линейные векторные пространства. Базис. Координаты вектора в выбранном базисе. Длина вектора. Линейные операции в координатах.	2
5	1	Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.	2
6	1	Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные формы уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	2
7	1	Кривые второго порядка. Канонические виды кривых второго порядка.	2
8	2	Элементы дискретной математики и математической логики. Основы комбинаторики.	1
8-10	3	Вычисление пределов функции. Эквивалентные бесконечно малые функции. Вычисление пределов с помощью таблицы основных эквивалентных бесконечно малых функций. Первый и второй замечательные пределы.	4
10-11	3	Понятие непрерывности в точке. Определения разрывов первого и второго родов. Устранимые	2



		разрывы. Непрерывность элементарных функций.	
11-12	4	Производная функции в точке. Таблица производных основных элементарных функций. Основные приемы вычислений.	2
12-13	4	Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функции, заданной параметрически.	3
14	4	Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. Правило Лопиталя.	2
15	1- 4	Контрольная работа.	2
16	4	Необходимое и достаточное условие экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.	2
17	4	Применение второй производной к нахождению интервалов выпуклости и вогнутости.	2
18	4	Общая схема исследования функций и построения графиков.	2
		Итого за I семестр:	36
II семестр			
1	5	Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.	2
2	5	Интегрирование рациональных дробей.	2
3	5	Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям.	2
4	5	Приложения определенных интегралов.	2
5		Контрольная работа.	2
6	5	Несобственные интегралы.	2
7	6	Область определения, предел и непрерывность функции нескольких переменных.	2
8	6	Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных.	2
9	6	Полный дифференциал функции нескольких переменных.	2
10	6	Градиент. Производная по направлению.	2
11	6	Частные производные и дифференциалы высших порядков.	2
12-13	6	Экстремумы функции нескольких переменных.	4
14	7	Частичные суммы. Сходимость числового ряда.	2



		Необходимый признак сходимости.	
15	7	Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопередающие ряды.	2
16	7	Радиус сходимости степенного ряда.	2
17-18	7	Защита РГР	4
		Итого за II семестр:	36
III семестр			
1-4	8	Вычисление двойных и тройных интегралов повторным интегрированием. Замена переменных в двойном и тройном интегралах	8
5-7	8	Криволинейные интегралы первого и второго рода.	6
8	9	Действия над комплексными числами.	2
9	9	Дифференцирование функций комплексного переменного.	2
10	10	Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.	2
11	10	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.	2
12	10	Решение задач на некоторые частные виды О.Д.У. второго порядка.	2
13	10	Отыскание частных решений. Контрольная работа.	2
14	8-10	Контрольная работа.	2
15-16	10	Построение общего и нахождение частного решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.	4
17-18	10	Защита РГР.	4
		Итого за III семестр:	36
		ВСЕГО:	108

2.3 Распределение самостоятельной работы студентов

Распределение самостоятельной работы студентов ОФО представлено в виде таблицы 2.5.

СРС по дисциплине «Высшая математика» включает выполнение контрольной и расчетно-графической работы, подготовку к текущему контролю и к промежуточной аттестации (экзамен в 1 и 3 семестре, зачет во втором семестре).

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 14



Таблица 2.5 – График недельной загрузки СРС студента ОФО

Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Формы текущего контроля (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Самостоятельная работа студента	Формы текущего контроля (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
1	2	3	7	8
1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.	1	1-7	2	Коллоквиум РГР
2. Элементы дискретной математики и математической логики.	1	8-9	1	Собеседование
3. Введение в математический анализ.	1	9-10	2	РГР
4. Дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного.	1	10-18	2	РГР
Текущий и итоговый контроль	1		2	Экзамен
Итого за семестр:			9	
5. Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы.	2	1-6	10	Коллоквиум РГР
6. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных.	2	6-11	12	Тестирование РГР
7. Числовые и функциональные ряды.	2	12-16	10	РГР
Текущий и итоговый контроль	2		22	Контрольная работа Зачет
Итого за семестр:			54	
8. Кратные и криволинейные интегралы.	3	1-6	15	Коллоквиум Тестирование РГР
9. Функции комплексного переменного.	3	7-8	10	Тестирование РГР
10. Обыкновенные дифференциальные уравнения.	3	9-18	16	Контрольная работа РГР
Текущий и итоговый контроль	3		22	РГР Экзамен
Итого за семестр:	3		63	



ИТОГО:		126	
--------	--	-----	--

2.4. Распределение интерактивных видов занятий.

Очная форма обучения.

Объем интерактивных занятий – 9 часов.

Таблица 2.7 – Распределение интерактивных занятий студента ОФО

Первый семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	9
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	8
Всего	0	2	1	1	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	2	2	2	0	17

Второй семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	6
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	8
Всего	0	1	1	1	2	0	1	1	1	0	2	0	0	0	2	1	1	1	14

Третий семестр

№ недели	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Всего
Лекции	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	6
Практические занятия и лабораторные работы	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9
Всего	0	1	1	1	2	1	1	1	1	0	2	0	0	0	2	1	1	0	15

Характеристика интерактивных видов занятий

Интерактивные методы на лекциях:

Мини-лекция, Презентация с обсуждением, Обратная связь, Лекция с заранее запланированными ошибками.

Интерактивные методы на практических занятиях:

Работа в малых группах в компьютерном классе, коллективный (многостороннее взаимодействие в форме группового общения, в котором принимает участие каждый студент на практическом занятии); коллективно-групповой (работа малых групп соединяется с работой всех присутствующих на семинарском занятии).

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 16

**Интерактивные методы в самостоятельной работе:**

Мозговой штурм. Метод проектов, Метод обучения в парах (спарринг-партнерство).

3. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Таблица 3.1 – Перечень вопросов и задач для видов контроля

Наименование темы	Перечень вопросов и задач	Формируемые индикаторы компетенции
Входной контроль (проводится на 1-2 неделях 1-го семестра в письменной форме по индивидуальным заданиям)	1. Логарифмы Определение. Основные свойства Простейшие логарифмические уравнения и неравенства. 2. Основы тригонометрии Основные тригонометрические функции. Формулы приведения. Решение простейших тригонометрических уравнений. 3. Показательные функции. Простейшие уравнения и неравенства.	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2
Текущий контроль (проводится на всех видах занятий и при проверке конспектов лекций, в письменной форме) по всем разделам и темам курса	Перечень вопросов к текущему контролю: Линейная алгебра Матрицы, виды матриц. Действия над матрицами. Определители, их свойства. Минор, алгебраическое дополнение. Вычисления определителей с помощью алгебраических дополнений. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2



	Обратная матрица, методы вычисления, матричная форма записи СЛАУ, решение СЛАУ с помощью обратной матрицы. Ранг матрицы, теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса для решения СЛАУ (общий случай система n-го порядка). Аналитическая геометрия Понятие вектора, проекции вектора на оси координат, единичные орты, направляющие косинусы. Линейные операции над векторами, их основные свойства, коллинеарность и компланарность векторов. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов, его свойства. Векторное произведение векторов, его свойства. Смешанное произведение векторов, его свойства. Расстояние между двумя точками на плоскости. Нахождение площади треугольника, деление отрезка в заданном отношении. Уравнение прямой на плоскости: с угловым коэффициентом; проходящей через данную точку с угловым коэффициентом; проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми,	
--	---	--



	условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Общее уравнение прямой, нормальное уравнение прямой, расстояние от точки до прямой на плоскости. Общее уравнение плоскости, угол между плоскостями. Нормальное уравнение плоскости, расстояние от точки до плоскости. Общее уравнение прямой в пространстве, канонические уравнения прямой, параметрические уравнения. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Понятие о линиях второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Общее уравнение линии второго порядка. Элементы дискретной математики и математической логики Элементы алгебры логики высказываний. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность). Ориентированные графы.	
--	---	--



	Основные понятия комбинаторики. Перестановки, размещения и сочетания. Математический анализ Предел функции непрерывного аргумента. Бесконечно малые функции (примеры). Первый и второй замечательный предел. Непрерывность функций, классификация точек разрыва (примеры). Понятие производной функции, геометрический смысл. Производная суммы, произведения, частного функций. Производная сложной функции, производная неявной функции. Таблица производных элементарных функций. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Раскрытие неопределённостей в пределах, правило Лопиталя. Формула Тейлора, формула Маклорена, разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Возрастание и убывание функций. Необходимое и достаточное условие монотонности функции на отрезке. Экстремальные точки.	
--	--	--



	Достаточные условия экстремума. Выпуклость и вогнутость кривой. Достаточные условия точек перегиба. Асимптоты графиков функций. Схема исследования функций, построение их графиков. Первообразная и понятие неопределенного интеграла. Геометрический смысл неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям для неопределенного интеграла. Интегрирование простейших тригонометрических выражений, тригонометрические подстановки. Интегрирование рациональных дробей. Понятие определенного интеграла, интегральная сумма. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям, замена переменной в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами, интегралы от разрывных	
--	---	--



	функций. Приложения определенного интеграла. Нахождение площадей, вычисление длины дуги. Нахождение объемов тел вращения с помощью определенного интеграла. Функции нескольких переменных, основные понятия, непрерывность функции. Частные производные. Повторное дифференцирование, производные, дифференциалы высших порядков. Экстремум функции двух переменных, ее исследование. Ряды Определение числового ряда и его суммы, свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Ряды с неотрицательными членами, признак сравнения. Признак сходимости Даламбера. Интегральный признак Коши. Знакопередающиеся ряды, признак Лейбница, абсолютная и условная сходимость ряда. Степенные ряды, общие определения. Интервал и радиус сходимости ряда. Функции комплексного	
--	---	--



	переменного Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Корень n-ой степени из комплексного числа. Кратные и криволинейные интегралы Двойной интеграл. Определение. Свойства. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты. Тройной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление путем повторного интегрирования. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты. Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение. Вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение. Вычисление. Формула Грина. Дифференциальные уравнения Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Частное и общее решение. Задача Коши для уравнений первого порядка. Интегрирование	
--	---	--



	дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и однородных. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши для дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема существования и единственности. Некоторые способы решения уравнения высшего порядка с помощью понижения порядка. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Приемы решения линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.	
Тема 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.	Тест №1 1. Рангом матрицы называется: а) количество строк матрицы; б) количество столбцов матрицы; в) наивысший порядок отличный от нуля миноров; г) размерность матрицы. 2. Если определитель системы линейных алгебраических уравнений не равен 0, то система: а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесчисленное количество решений; г) имеет 3 решения.	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2



	3. Какие из этих 3-х точек лежат в одной плоскости: а) (1,1,1), (2,2,2), (0,-1,3); б) (0,0,1), (2,-1,0), (3,3,3); в) (0,0,0), (1,-1,1), (2, 0, 1); д) все предыдущие 4. Геометрическая интерпретация векторного произведения есть: а) площадь параллелограмма; б) объём параллелепипеда; в) работа; г) расстояние между точками.	
Тема 2 Элементы дискретной математики и математической логики	1. Предложение : «Кто такой Л.Толстой?» является: а) высказыванием; б) предикатом; в) квантором; г) все вышеперечисленные варианты не подходят 2. Высказывания, содержащее связи <i>и, или, не, если...то, только если, тогда и только тогда</i>, называется: а) простым; б) сложным; в) булевой алгеброй; г) все вышеперечисленное 3. Высказывание – это а) утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно; б) операция, заданная на некотором множестве; в) правило теории множеств; г) любое утверждение или предложение, содержащее вопрос.	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2



Темы 3 и 8 Введение в математический анализ. Функции комплексного переменного.	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x}$ равен: а) ∞; б) 0; в) 4; г) на «0» делить нельзя! 2. Какое из этих 2-х чисел больше $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 - 12i$: а) больше первое, т.к. его действительная часть больше; б) больше второе, т.к. его мнимая часть больше; в) отношений «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует; г) если перевести их в декартовы координаты, то они равны. 3. Функции $\sin x$ и x при $x \rightarrow \infty$ будут эквивалентны друг другу, т.к.: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; б) $\sin x = x$; в) по второму замечательному пределу; г) они не являются эквивалентными. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ равен: а) 0; б) ∞; в) получаем неопределённость вида $0 \cdot \infty$; г) получаем неопределённость вида $0 \cdot 0$. 5. В выражении $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{i}$, есть: а) сила тока; б) единичный орт; в) мнимая единица, равная $\sqrt{-1}$; г) момент инерции рамки из n витков тонкой проволоки.	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2
Темы 4 и 6 Дифференциальное	Тест №3 1. Касательная к графику	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2



исчисление функций одного и нескольких независимых переменных	функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x = 0$ образует с осью Ох угол: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) 60°; 4) π. 2. Наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-1,5; 2,5]$ достигается 1) в точке $x = -1$; 2) в точке $x = 1$; 3) $x = 2,5$; 4) $x = -1,5$. 3. Область определения функции $y = \ln x - 3$ есть интервал: 1) $x \in (0; \infty)$; 2) $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) правильный ответ отсутствует в предыдущих вариантах. 4. $\overline{\text{grad}} f(x, y)$ в точке $O(1, 1)$ для $f(x, y) = x^2 y$ есть вектор: 1) $\overline{\text{grad}} f = 2\bar{i} + \bar{j}$; 2) $\overline{\text{grad}} f = \bar{i} - 2\bar{j}$; 3) $\overline{\text{grad}} f = 2\bar{i} - \bar{j}$; 4) $\overline{\text{grad}} f = 2\bar{i} + 2\bar{j}$.	
Тема 5 Неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы.	1. При замене переменной в определенном интеграле пределы интегрирования: 1) изменяются; 2) остаются постоянными; 3) меняются местами; 4) меняют знак на противоположный. 2. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x}$ равен	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2



	1) $-\ln \cos x + c$; 2) $\ln \cos x + c$; 3) $\frac{3\cos^3 x}{2} + c$; 4) относится к разряду «не берущихся» интегралов. 3. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ 1) расходится; 2) сходится; 3) не вычисляется; 4) равен 1. 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ равен 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{8}{3}$.					
Тема 7 Числовые и функциональные ряды	1. Можно ли использовать признак Даламбера для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$. Выяснить сходится ли ряд?	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2				
	<table><tr><td>ряд</td><td>2) можно, ряд сходится</td><td>3) нельзя, ряд расходится</td><td>4) p</td></tr></table>		ряд	2) можно, ряд сходится	3) нельзя, ряд расходится	4) p
	ряд		2) можно, ряд сходится	3) нельзя, ряд расходится	4) p	
2.) Найти сумму ряда $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$ <table><tr><td>1) $\frac{1}{4}$</td><td>2) $\frac{1}{3}$</td><td>3) $\frac{1}{2}$</td><td>4) $\frac{2}{3}$</td></tr></table>	1) $\frac{1}{4}$	2) $\frac{1}{3}$	3) $\frac{1}{2}$	4) $\frac{2}{3}$		
1) $\frac{1}{4}$	2) $\frac{1}{3}$	3) $\frac{1}{2}$	4) $\frac{2}{3}$			



	3. Можно ли исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Коши, если $a_n = \frac{n^n}{(n+1)^n}$. Сходится ли ряд? <table><tr><td>1) нельзя, ряд сходится</td><td>2) можно, ряд расходится</td><td>3) нельзя, ряд расходится</td><td>4) ...</td></tr></table>	1) нельзя, ряд сходится	2) можно, ряд расходится	3) нельзя, ряд расходится	4) ...	
1) нельзя, ряд сходится	2) можно, ряд расходится	3) нельзя, ряд расходится	4) ...			
Тема 9 Кратные и криволинейные интегралы	1. Какое значение имеет интеграл $\iint_{\Omega} dx dy$, где $\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1, x + y \leq 2\}$: 1) 1; 2) 1.5; 3) 2; 4) 2,5 2. Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле : <table><tr><td>1) $S = \iint_D f(x, y) dx dy$</td><td>2) $S = \iint_D \rho$</td></tr><tr><td>3) $S = \iint_D f(x) dx$</td><td>4) $S = \iint_D d$</td></tr></table>	1) $S = \iint_D f(x, y) dx dy$	2) $S = \iint_D \rho$	3) $S = \iint_D f(x) dx$	4) $S = \iint_D d$	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2
1) $S = \iint_D f(x, y) dx dy$	2) $S = \iint_D \rho$					
3) $S = \iint_D f(x) dx$	4) $S = \iint_D d$					



Тема 10 Обыкновенные дифференциальные уравнения	1. Какой тип уравнений имеет следующую форму записи: $y' = f(x, y)$? 1. с разделяющимися переменными; 2. однородное; 3. в полных дифференциалах. 2. Определить тип уравнения: $y' + y = 0$. 1. Бернулли 2. С разделяющимися переменными 3. Линейное 3. Решить задачу Коши: $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, y(0) = -1, y'(0) = 1$ 1) $y = e^{-2x} + e^{-x} + xe^{-x}$ 2) $y = e^{-2x} - e^{-x} + xe^{-x}$ 3) $y = e^{2x} + e^{-x} - xe^{-x}$ 4) $y = e^{2x} - e^{-x} + xe^{-x}$	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2
Подготовка к промежуточной аттестации (проводится в виде экзамена в 1-м и 3-ем семестрах по индивидуальным заданиям и виде зачета во 2-м)	1 семестр Матрицы. Определители и их свойства. Способы вычисления определителей. Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Ранг матрицы и способы его вычисления. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных алгебраических уравнений. Обратная матрица. Матричный	УК-1.1; УК-1.2; ОПК-1.2



	способ решения систем с квадратной матрицей. Векторы. Алгебраические операции с векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение векторов и его свойства. Смешанное произведение векторов и его свойства. Прямая линия на плоскости и ее уравнения. Прямая линия в пространстве и ее уравнения. Расстояние от точки до прямой. Уравнения плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Уравнение эллипса и его построение. Уравнение гиперболы и её построение. Уравнение параболы и её построение. Предел функции. Свойства. Односторонние пределы (примеры). Бесконечно малые функции. Таблица основных эквивалентных бесконечно малых. Первый замечательный предел. Примеры. Второй замечательный предел. Примеры.	
--	---	--



	Непрерывность функции в точке. Классификация разрывов с примерами. Асимптоты к графикам функций и способы их нахождения. Примеры. Производная функции в точке. Определение. Геометрический смысл. Правило Лопиталя. Примеры. Формулы Тейлора и Маклорена. Семестр Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Основные приёмы интегрирования. Определение и основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов методами замены переменной и по частям. Частные производные функции нескольких переменных. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия. Условный экстремум. Понятие числового ряда. Необходимый признак	
--	---	--



	сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признаки сравнения («эталонные» ряды); радикальный признак Коши; признак Даламбера. Знакопередающиеся ряды: признак Лейбница. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. 3 семестр Двойной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление двойного интеграла путем повторного интегрирования. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты. Тройной интеграл. Определение. Свойства. Вычисление путем повторного интегрирования. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты. Криволинейные интегралы 1-го рода. Определение. Вычисление. Криволинейные интегралы 2-го рода. Определение. Вычисление. Формула Грина.	
--	---	--



	Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Арифметические операции над комплексными числами. Корень n-ой степени из комплексного числа. Дифференциальное уравнение первого порядка. Частное и общее решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Свойства решений. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Случаи действительных корней характеристического уравнения. Линейные однородные	
--	---	--



	дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Случай комплексных корней характеристического уравнения. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-ого порядка с постоянными коэффициентами.	
--	--	--

Таблица 3.2 - Методические указания к изучению теоретических вопросов и решению типовых задач, используемые при изучении дисциплины

№ п/п	Наименование указаний, пособий	Количество экземпляров
1	Элементы линейной алгебры и их применение при решении практических задач Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., Макаров П.В., Кузнецов В.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2016, - 64с	300
2	Комплексные числа. Понятие функции комплексного переменного. Макаров П.В., Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., Иванов В.П., Семенова Н.В. Учебное пособие . Москва, ГУЗ, 2017,-47с	150
3	Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл. Часть I Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2018, - 68с	150
4	Интегральное исчисление. Определенный интеграл. Часть II. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., Макаров П.В. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2018, - 50с	150
5	Элементы теории множеств и математической логики. Кузнецова Н.А., Червяков А.В., Хасанов А.А. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2019,- 46с	150
6	Математический анализ функции одной переменной. Часть I. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2019. - 69 с.	150
7	Математический анализ функции одной переменной. Часть II. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2019. - 61 с.	150
8	Интегральное исчисление. Приложение определенного интеграла. Часть III. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В.	150



№ п/п	Наименование указаний, пособий	Количество экземпляров
	Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2020. - 62 с.	
9	Математический анализ функции одной переменной. Часть III. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2020. - 62 с.	150

3.1. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение обучающимся учебной дисциплины «Высшая математика» предполагает изучение материалов дисциплины на аудиторных занятиях и в ходе самостоятельной работы. Аудиторные занятия проходят в форме лекций, семинаров и лабораторных работ. Самостоятельная работа включает разнообразный комплекс видов и форм работы обучающихся.

Самостоятельная работа студентов (СРС) позволяет предметно выработать аналитические навыки, обеспечить понимание основ математической теории и практики применения математического аппарата к решению практических задач, более осознанно относиться к уровню своей профессиональной подготовки. СРС способствует развитию их мыслительной деятельности, обеспечивает усвоение определенного учебного материала и предоставляет необходимую подготовку для решения конкретных практических задач, входящих в их будущие профессиональные обязанности. СРС направлена на обеспечение индивидуализации при изучении курса, на развитие способностей и возможностей, на персонализацию контроля за качеством обучения.

При подготовке к практическим занятиям, руководствуясь планом и списком рекомендуемой литературы, необходимо изучить тему так, чтобы по каждому из предложенных вопросов студент мог дать развернутый, обстоятельный ответ.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов включает:

- Работа над конспектом лекции
- Подготовка к практическому занятию
- Подготовка к практическому занятию с ИАМ
- Доработка конспекта лекции с применением учебника, методической литературы, дополнительной литературы
- Подбор, изучение, анализ и конспектирование рекомендованной литературы
- Самостоятельное изучение отдельных тем, параграфов
- Подготовка к экзамену или зачету.

Для успешного освоения учебной дисциплины и достижения поставленных целей необходимо внимательно ознакомиться настоящей рабочей программы учебной дисциплины. Ее может представить преподаватель на вводной лекции или самостоятельно обучающийся использует информацию на официальном Интернет-сайте Университета.



Следует обратить внимание на список основной и дополнительной литературы, которая имеется в электронной библиотечной системе Университета, на предлагаемые преподавателем ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет. Эта информация необходима для самостоятельной работы обучающегося.

Алгоритм деятельности преподавателя и студентов

Этапы деятельности	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студент
Подготовка: определение темы, цели и задач задания	Мотивирует, помогает студенту в постановке коммуникативных задач	Определяет и обсуждает с преподавателем актуальность проблемы; выдвигает совместно с преподавателем гипотезу исследования
Планирование: – определение источников, способов сбора, анализа информации, способов представления результатов; – установление критериев оценки результата и процесса	Корректирует в случае необходимости деятельность студента, предлагает идеи, высказывает предположения	Формулирует задачи и разрабатывает план действий; обсуждает с преподавателем методы исследования
Сбор информации: наблюдение, работа со справочной литературой, учебной, научной и др.	Наблюдает за деятельностью студента, косвенно руководит его исследовательской деятельностью	Собирает и систематизирует информацию по теме (задаче)
Анализ информации, формулирование выводов	Корректирует деятельность студента, наблюдает, советует	Анализирует собранную информацию, решает поставленную задачу
Оформление работы, подготовка к представлению результатов	Консультирует в оформлении расчетно-графической работы	Оформляет решение и конечные результаты
Представление задания	Оценивает результаты решения задач по заранее установленным критериям	Представляет решенные задания, проходит процедуру защиты расчетно-графического задания.
Подведение итогов, рефлексия и оценка	Оценивает усилия, использованные и неиспользованные	Участвует в коллективном обсуждении, определяет возможности для



Этапы деятельности	Содержание деятельности	
	Преподаватель	Студент
	возможности, творческий подход студента.	продолжения исследования

Методические рекомендации при работе над конспектом лекций

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Методические рекомендации студентам по самостоятельной работе над изучаемым материалом и при подготовке к практическим занятиям

Планы практических занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.

Прежде чем приступить к изучению темы, необходимо прокомментировать основные вопросы плана семинара. Такой подход преподавателя помогает студентам быстро находить нужный материал к каждому из вопросов, не задерживаясь на второстепенном.

Подготовка к практическом занятию включает 2 этапа:

1й – организационный;

2й - закрепление и углубление теоретических знаний.

На первом этапе студент планирует свою самостоятельную работу, которая включает:

- уяснение задания на самостоятельную работу;
- подбор рекомендованной литературы;
- составление плана работы, в котором определяются основные пункты предстоящей подготовки.

Составление плана дисциплинирует и повышает организованность в работе.

Второй этап включает непосредственную подготовку студента к занятию. Начинать надо с изучения рекомендованной литературы. Необходимо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной работы. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы студент должен стремиться понять и запомнить



основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале.

Заканчивать подготовку следует составлением плана (конспекта) по изучаемому материалу (вопросу). Это позволяет составить концентрированное, сжатое представление по изучаемым вопросам.

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

При необходимости следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

В начале занятия студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия, раскрывают и объясняют основные положения публичного выступления. В процессе творческого обсуждения и дискуссии вырабатываются умения и навыки использовать приобретенные знания для различного рода ораторской деятельности.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студентов. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику и тем самым проникнуть в творческую лабораторию автора.

Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятельной работе.

Важно развивать у студентов умение сопоставлять источники, продумывать изучаемый материал.

Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирования у студентов.

Преподаватель может рекомендовать студентам следующие основные формы записи: план (простой и развернутый), выписки, тезисы.

Результаты конспектирования могут быть представлены в различных формах.

План – это схема прочитанного материала, краткий (или подробный) перечень вопросов, отражающих структуру и последовательность материала. Подробно составленный план вполне заменяет конспект.

Конспект – это систематизированное, логичное изложение материала источника. Различаются четыре типа конспектов:

- План-конспект – это развернутый детализированный план, в котором достаточно подробные записи приводятся по тем пунктам плана, которые нуждаются в пояснении.
- Текстуальный конспект – это воспроизведение наиболее важных положений и фактов источника.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 39



- Свободный конспект – это четко и кратко сформулированные (изложенные) основные положения в результате глубокого осмысливания материала. В нем могут присутствовать выписки, цитаты, тезисы; часть материала может быть представлена планом.

- Тематический конспект – составляется на основе изучения ряда источников и дает более или менее исчерпывающий ответ по какой-то схеме (вопросу).

Ввиду трудоемкости подготовки к практическим занятиям преподавателю следует предложить студентам алгоритм действий, рекомендовать еще раз внимательно прочитать записи лекций и уже готовый конспект по теме занятия, тщательно продумать свое устное выступление.

Самостоятельная работа способствует сознательному усвоению, углублению и расширению теоретических знаний; формируются необходимые профессиональные умения и навыки и совершенствуются имеющиеся; происходит более глубокое осмысление методов научного познания конкретной науки, овладение необходимыми умениями творческого познания.

Основными формами самостоятельной работы являются:

- конспектирование лекций и прочитанного источника;
- проработка материалов прослушанной лекции;
- самостоятельное изучение программных вопросов, указанных преподавателем на лекциях и выполнение домашних заданий;
- формулирование тезисов;
- составление аннотаций и написание рецензий;
- обзор и обобщение литературы по интересующему вопросу;
- изучение научной литературы;
- подготовка к семинарским занятиям, зачетам и экзаменам;
- подготовка и защита реферата, электронных презентаций.

Рекомендации по оцениванию устных ответов студентов на семинарских занятиях и выполнении практических заданий.

С целью контроля и подготовки студентов к изучению новой темы в начале каждого практического занятия преподавателем проводится индивидуальный или фронтальный устный опрос по выполненным заданиям предыдущей темы.

Критерии оценки:

- правильность ответа по содержанию задания (учитывается количество и характер ошибок при ответе);
- полнота и глубина ответа (учитывается количество усвоенных фактов, понятий и т.п.);
- сознательность ответа (учитывается понимание излагаемого материала);
- логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией);
- рациональность использованных приемов и способов решения поставленной учебной задачи (учитывается умение использовать наиболее прогрессивные и эффективные способы достижения цели);



- своевременность и эффективность использования наглядных пособий и технических средств при ответе (учитывается грамотно и с пользой применять наглядность и демонстрационный опыт при устном ответе);
- использование дополнительного материала (обязательное условие);
- рациональность использования времени, отведенного на задание (не одобряется затянутость выполнения задания, устного ответа во времени, с учетом индивидуальных особенностей студентов).

Оценка «5» ставится, если студент:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

Оценка «4» ставится, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

Оценка «3» ставится, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

Оценка «2» ставится, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Методические рекомендации по подготовке к коллоквиуму

Коллоквиум — форма проверки и оценивания знаний учащихся в системе образования, преимущественно в ВУЗах. Представляет собой проводимый по инициативе преподавателя промежуточный мини-экзамен один или несколько раз в семестр, имеющий целью уменьшить список тем, выносимых на основной экзамен, и оценить текущий уровень знаний студентов. В ходе коллоквиума могут также защищаться расчетно-графические работы учащихся. Оценка, полученная на коллоквиуме, может влиять на оценку на основном экзамене. В некоторых случаях преподаватель может выносить на коллоквиум все пройденные темы и студент, как на итоговом экзамене, получает единственную оценку, идущую в зачёт по дисциплине. Подготовка к коллоквиуму это исследовательская работа, основанная, прежде всего, на изучении значительного количества научной и учебной литературы.



Цель проведения коллоквиума – контроль над текущим результатами обучения.

Текущий контроль представляет собой регулярно осуществляемую проверку усвоения учебного материала. Данная оценка предполагает систематичность, непосредственно коррелирующаяся с требованием постоянного мониторинга качества обучения, а также необходимость балльной оценки успеваемости студента.

Оценка знаний, умений, навыков и компетенций осуществляется на всех практических занятиях по всем формам обучения в соответствии с целями и задачами занятия. Контроль может проводиться в начале, в ходе отработки основной части и в заключительной части занятия.

Контроль, проводимый в начале занятия, имеет целью проверку качества самостоятельной работы студентов по соответствующей теме практического занятия, а также усвоения основных положений ранее пройденного учебного материала, необходимых для усвоения вопросов данного занятия.

Контроль, проводимый в ходе основной части занятия, должен обеспечить проверку не только хода и качества усвоения учебного материала, но и развитие у студентов творческого мышления.

Контроль, проводимый в заключительной части занятия, осуществляется в случаях, когда оценку качества усвоения материала можно дать после его полного изложения.

Текущий контроль знаний, умений, навыков и приобретенных компетенций осуществляется преподавателем по пятибалльной шкале с выставлением оценки в журнале учета занятий.

Критерии оценивания коллоквиума

Оценка	Критерии оценки
отлично	Выставляется студенту, если он логически верно выстроил ответ, исчерпывающе изложил информацию на поставленные вопросы. Для ответа использовал не только лекционный материал, но и рекомендованные основные и дополнительные источники.
хорошо	Студент в основном логично и полно изложил информацию, с незначительными и не принципиальными ошибками. Для ответа использовал в основном, лекционный материал



удовлетворительно	Студент не всегда логично излагает искомую информацию. Ответ не полный. Глубина использования источников не достаточная
неудовлетворительно	Студент не ответил на поставленные вопросы. Отсутствует логика в изложении информации.

Методические рекомендации по подготовке к зачету

Цель: проверка знаний, навыков и компетенций студента, его умение самостоятельно работать (ОК-8).

Задачи:

1. Оценить навыки и умения грамотно и убедительно излагать изученный учебный материал.
2. Оценить умение студентов ориентироваться в основной и дополнительной учебной математической литературе.
3. Закрепить умение студентов анализировать математические модели прикладных и ориентировано направленных профессиональных задач, уметь оценивать их результат.

Критерии оценки знаний

Учитывается текущая успеваемость, посещаемость занятий, выполнение заданий для самостоятельной работы, защита ргр, сдача тестовых занятий и т.д.

Результаты оцениваются:

«зачтено» - при наличии твердых знаний, изложении ответа с незначительными ошибками, уверенно исправленными после наводящих вопросов по изложенным выше вопросам.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 43



«не зачтено» - при наличии грубых ошибок в ответе, непонимании сущности излагаемого вопроса, неуверенности и неточности ответов после наводящих вопросов по вопросам изучаемой дисциплины.

Оценка выставляется в экзаменационной ведомости.

Методические рекомендации по подготовке к экзаменам

Цель: проверка знаний, навыков и компетенций студента, его умение самостоятельно работать (ОК-8).

Задачи:

1. Оценить навыки и умения грамотно и убедительно излагать изученный учебный материал.
2. Оценить умение студентов ориентироваться в основной и дополнительной учебной математической литературе.
3. Закрепить умение студентов анализировать математические модели прикладных и ориентировано направленных профессиональных задач, уметь оценивать их результат.

Критерии оценки знаний

Учитывается текущая успеваемость, посещаемость занятий, выполнение заданий для самостоятельной работы, защита ргр, сдача тестовых занятий и т.д.

Результаты экзамена оцениваются:

«отлично» - при наличии у студента глубоких, исчерпывающих знаний, грамотном и логически стройном построении ответа по следующим направлениям дисциплины:

- освоение теоретических положений по математическим методам и моделям;
- глубокое знание методологических положений и алгоритмов решения задач по разделам дисциплины;
- применение полученных знаний для решения практических задач,
- **«хорошо»** - при наличии твердых и достаточно полных знаний, логически стройном построении ответа при незначительных ошибках по направлениям, перечисленным при оценке «отлично».

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 44



«удовлетворительно» - при наличии твердых знаний, изложении ответа с ошибками, уверенно исправленными после наводящих вопросов по изложенным выше вопросам.

«неудовлетворительно» - при наличии грубых ошибок в ответе, непонимании сущности излагаемого вопроса, неуверенности и неточности ответов после наводящих вопросов по вопросам изучаемой дисциплины:

Оценка выставляется в экзаменационной ведомости.

Методические рекомендации по подготовке к контрольным и расчетно-графическим работам

Контрольная работа (КР) проводится раз в семестр, но может проводится после изучения каждого раздела (темы) дисциплины на усмотрение преподавателя..

Контрольная работа, как правило, является индивидуальной для каждого студента и состоит из решения практической задачи. Контрольная работа проводится на практическом занятии.

Оценка КР выставляется в журнал учебных занятий и учитывается при аттестации студентов в период зачётной экзаменационной сессии (сокращение числа экзаменационных вопросов при оценке КР не ниже «хорошо», предоставление права студенту выбора экзаменационных вопросов из предложенных преподавателем и других предпочтений).

Критерии оценки

Оценка «отлично» выставляется студенту, если практическая задача решена полностью с соответствующими математическим выкладками, обоснованиями или устными ответам на возникшие у преподавателя вопросы.

Оценка «хорошо» - выставляется студенту, если практическая задача решена полностью без подробных выкладок.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 45



Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача решена не полностью.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача не решена.

Оценка выставляется в журнале посещаемости студентов.

Текущий и итоговый контроль успеваемости по дисциплине
Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения образовательной программы в рамках учебной дисциплины

3.2. Задания на самостоятельную работу

Задания для самостоятельной работы по 1 семестру

Цель: изучить основные понятия и теоремы линейной алгебры и аналитической геометрии, элементы дискретной математики и математической логики, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного.

Содержание:

- 1.Выполнение расчетно-графических заданий, подготовка к тестированию и контрольной работе.
- 2.Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление
3. Выполненные задания
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ: (берутся из раздела 3.5)
линейная алгебра и аналитическая геометрия № №1-6;
введение в математический анализ №№ 7,8;
дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного №№ 2,3,5,6,9,15

Вопросы: прорабатываются из раздела 3.4.

Отчетность: конспект лекций, контрольная работа (или тестирование), защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: пятибалльная.

Источники: обязательные: 2,4,5; дополнительные: 1,2 (см. раздел 5)

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 46



Задания для самостоятельной работы по 2 семестру

Цель: изучить основные понятия и теоремы по темам: неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных. Числовые и функциональные ряды.

Содержание:

- 1.Выполнение расчетно-графических работ, подготовка к тестированию и контрольной работе.
- 2.Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.
- 3.Подготовка к коллоквиумам.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление
3. Выполненные задания
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ: (берутся из раздела 3.5)
неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы. № № 1-5,8,9,12,14,15;

Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных № № 3-6

Числовые и функциональные ряды. №№ 7-9,18,19

Вопросы: прорабатываются вопросы из раздела 3.4

Отчетность: конспект лекций, защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: зачет

Источники: обязательные: 1,4,5; дополнительные: 3,4 (см. раздел 5)

Задания для самостоятельной работы по 3 семестру

Цель: изучить основные понятия и теоремы по темам: кратные и криволинейные интегралы. Комплексные числа и операции с ними. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Содержание:

- 1.Выполнение расчетно-графических работ, подготовка к тестированию и контрольной работе.



2.Проработка конспектов лекций, обязательной и дополнительной литературы с составлением конспекта.

3.Подготовка к коллоквиумам.

Срок выполнения: к экзаменационной сессии.

Ориентировочный объем расчетно-графической работы: не менее 80% правильно решенных заданий.

Порядок выполнения и оформления расчетно-графической работы

Структура РГР:

1. Титульный лист.
2. Оглавление
3. Выполненные задания
4. Список использованных источников.

Задания для расчетно-графических работ: (берутся из раздела 3.5)

Кратные и криволинейные интегралы № № 1-4;

Функции комплексного переменного № № 6-8

Обыкновенные дифференциальные уравнения №№ 9-15

Вопросы: прорабатываются вопросы из раздела 3.4

Отчетность: конспект лекций, защита расчетно-графической работы.

Метод оценки: пятибалльная.

Источники: обязательные:3,4,5; дополнительные: 3,4 (раздел 5)

3.3. Оценка самостоятельной работы студентов бакалавриата (КСР)

Контроль самостоятельной работы (КСР) – вид контактной внеаудиторной работы обучающихся по образовательной программе. КСР осуществляется преподавателем по результатам отчетов студентов. Оценка КСР выставляется по пятибалльной системе в отдельную ведомость и учитывается при аттестации студентов по дисциплине в период зачетно-экзаменационной сессии.

3.4. Задания для самостоятельной работы

Вопросы, требующие самостоятельной проработки и примеры тестов для их выполнения приведены в таблице 3.1. Расчетно-графические и другие задания приведены в п. 3.2.

3.5. Задачи

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОВЕРЯЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора
--------------------------------	-------------------------------



УК-1.Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Знает принципы поиска, отбора и обобщения информации. УК-1.2 Умеет критически анализировать и синтезировать информацию для решения поставленных задач.
ОПК-1 Способен учитывать современные тенденции развития техники и технологий в области техносферной безопасности, измерительной и вычислительной техники, информационных технологий при решении типовых задач в области профессиональной деятельности, связанной с защитой окружающей среды и обеспечением безопасности человека	ОПК-1.2 Умение ориентироваться в основных методах обеспечения техносферной безопасности, используя основные виды измерительной и вычислительной техники при решении типовых задач профессиональной деятельности; определять параметры опасных и вредных воздействий технологических и производственных процессов; выявлять базовые законы и закономерности развития науки в области техносферной безопасности

Примеры типовых расчетно-графических работ и образцы их выполнения*

По первому семестру

Задача №1

Точки $A(1;2;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(2;1;1)$ и $D(2;-1;1)$ являются вершинами тетраэдра.

1. Проверить, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.
2. Найти:
 - объём тетраэдра;
 - длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D ;
 - расстояние между скрещивающимися рёбрами AD и BC ;
 - уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C .

Решение

Найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2; -1; 1\}, \overrightarrow{AC} = \{1; -1; 0\}, \overrightarrow{AD} = \{1; -3; 0\}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

следовательно, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Объём тетраэдра:

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 49



$$V_{\tau} = \frac{1}{6}V_{\pi} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6}|-2| = \frac{1}{3}.$$

Площадь основания тетраэдра $ABCD$:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}| = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Длина искомой высоты $h = \frac{V_{\tau}}{S} = \frac{1 \cdot 2}{3\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{33}.$

Расстояние d между скрещивающимися рёбрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \{3; 0; -1\}, \overrightarrow{AD} = \{1; -3; 0\}.$$

Точка A принадлежит прямой AD , B – прямой BC . Тогда:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD}|} = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \bigg/ \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{91}}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + 3z - 6 = 0.$$

Задача №2

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений при всех действительных значениях параметра λ

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 4y + 3z = \lambda \\ -x - 3y + 2z = 5 \end{cases}.$$

Решение

Из расширенной матрицы системы, после указанных элементарных преобразований строк получим:

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 50



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & \lambda \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)+(3)]{(1)+2\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & 12 \\ 0 & -7 & 5 & \lambda+5 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-7 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right). \text{П}$$

о критерию Кронекера-Капелли система имеет решение только, если $\lambda = 7$. Таким образом, если $\lambda \neq 7$ – система несовместна, если $\lambda = 7$ система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} -7y + 5z = 12 \\ -x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (5z - 12)/7 \\ x = \frac{1-z}{7}, \quad z \in R \end{cases}.$$

Система имеет бесконечное число решений вида:

$$x = \frac{1}{7} - \frac{z}{7}, \quad y = \frac{5}{7}z - \frac{12}{7}, \quad z \in R.$$

Задача №3

Составить уравнение гиперболы в канонической системе координат, если в ней длина вещественной оси равна 1, а точка (1;3) принадлежит гиперболе.

Решение

Уравнение гиперболы в канонической системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из условия имеем, во-первых, $\frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$, а во-вторых $2a = 1$. Отсюда

$$a = \frac{1}{2}, \quad b^2 = \frac{9}{1/a^2 - 1} = 3.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Задача №4

Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{3 - 5x + 8x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} 3\pi x}{\sin \pi x}.$$

Решение



$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{3 - 5x + 8x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} + 8} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} + 8 \right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} 3\pi x}{\sin \pi x}, \text{ сделаем замену переменной } x = t + 2. \text{ Очевидно,}$$

$x \rightarrow 2$ равносильно $t \rightarrow 0$. Кроме того,

$$\operatorname{tg} 3\pi x = \operatorname{tg} 3\pi(t + 2) = \operatorname{tg}(3\pi t + 6\pi) = \operatorname{tg} 3\pi t \text{ и}$$

$$\sin \pi x = \sin \pi(t + 2) = \sin(\pi t + 2\pi) = \sin \pi t.$$

Но известно, что $\sin \pi t \sim \pi t$, $\operatorname{tg} 3\pi t \sim 3\pi t$, $t \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} 3\pi x}{\sin \pi x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3\pi t}{\sin \pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\pi t}{\pi t} = 3.$$

Задача №5

Найти производные следующих функций

$$\text{a) } y = 3^{\arcsin \frac{1}{x}}; \text{ б) } y = \lg \sin(2x^2 + 1).$$

Решение

$$\text{a) } \ln y = \ln 3^{\arcsin \frac{1}{x}} = \arcsin \frac{1}{x} \cdot \ln 3, \text{ это тождественное равенство в}$$

области определения функции $y(x)$. Поэтому, дифференцируя обе части равенства, с учётом, что y – функция переменной x имеем

$$\frac{1}{y} y' = \frac{\ln 3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x} \right)'; \quad y' = y \frac{\ln 3}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -3^{\arcsin \frac{1}{x}} \frac{\ln 3}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\ln \sin(2x^2 + 1) \right)' = \frac{1}{\sin(2x^2 + 1)} \left(\sin(2x^2 + 1) \right)' = \\ &= \frac{\cos(2x^2 + 1)}{\sin(2x^2 + 1)} (2x^2 + 1)' = 4x \operatorname{ctg}(2x^2 + 1). \end{aligned}$$

Задача №6

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 52



Для следующих функций провести их полные исследования средствами дифференциального исчисления и построить их графики

а) $y = \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2}$; б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)}$.

Решение

а) $y = \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2}$, $y' = \frac{(x-4)^2}{(x+1)^3}(x+11)$, $y'' = \frac{150(x-4)}{(x+1)^4}$.

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 4; x = -11$. При этом знак производной в левой окрестности точки $x = -11$ положительный, а в окрестности правой – отрицательный. Следовательно, $x = -11$ – точка локального максимума и $y(-11) = -\frac{135}{4}$. В точке $x = 4$ экстремума нет.

Промежуток возрастания: $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, т.к. $y'(x) > 0$.

Промежуток убывания: $(-11; -1)$, т.к. $y'(x) < 0$.

3. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 4$. При этом $y'' < 0$ при $x < 4$ и $y'' > 0$, если $x > 4$. Следовательно, $x = 4$ – точка перегиба графика функции. На промежутке $(-\infty; -1) \cup (-1; 4)$ – функция выпукла вверх.

На промежутке $(4; +\infty)$ – функция выпукла вниз.

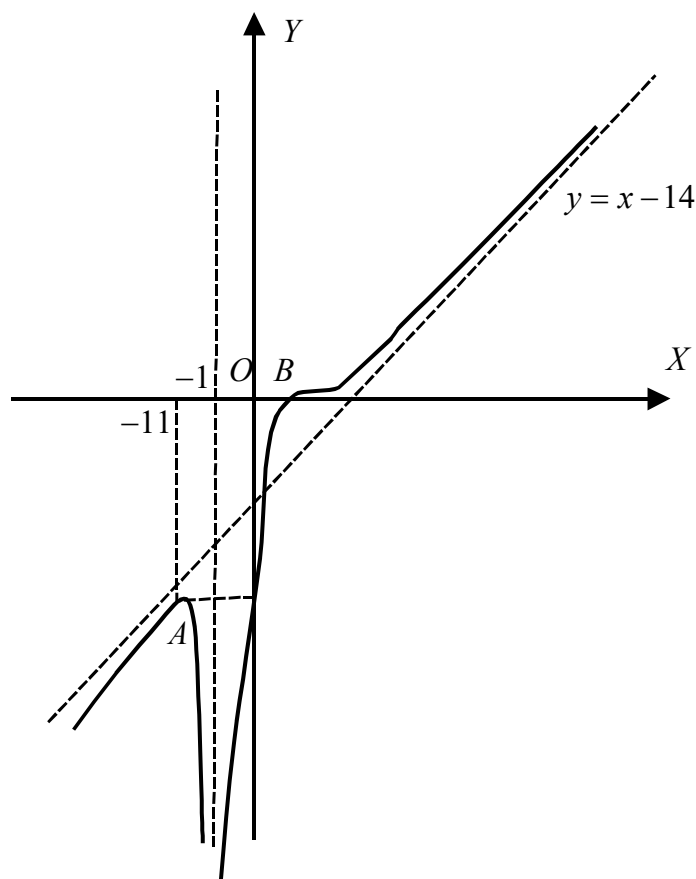
4. Асимптоты

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2} = -\infty \Rightarrow x = -1 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

$$y(x) = \frac{(x-4)^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 - 12x^2 + 48x - 64}{x^2 + 2x + 1} = x - 14 + \frac{75x - 50}{x^2 + 2x + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - (x - 14)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{75x - 50}{x^2 + 2x + 1} = 0,$$

$y(x) = x - 14$ – наклонная асимптота при $x \rightarrow \infty$. График функции изображен на рисунке 1.



$A(-11; -135/4)$ – локальный максимум

$B(4; 0)$ – точка перегиба

Рисунок 1

б) $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-4)^2} = (x-1)^{1/3}(x-4)^{2/3}$.

1. Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y' = \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-4)}}, y'' = \frac{-2}{\sqrt[3]{(x-1)^5(x-4)^4}},$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2; y' = \infty \Leftrightarrow x = 4$. В точке $x = 1$ y' не существует, точка $A(2; \sqrt[3]{4})$ – локальный максимум; точка $B(4; 0)$ – локальный минимум.

Промежуток возрастания: $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$, т.к. $y'(x) > 0$.

Промежуток убывания: $(2; 4)$, т.к. $y'(x) < 0$.

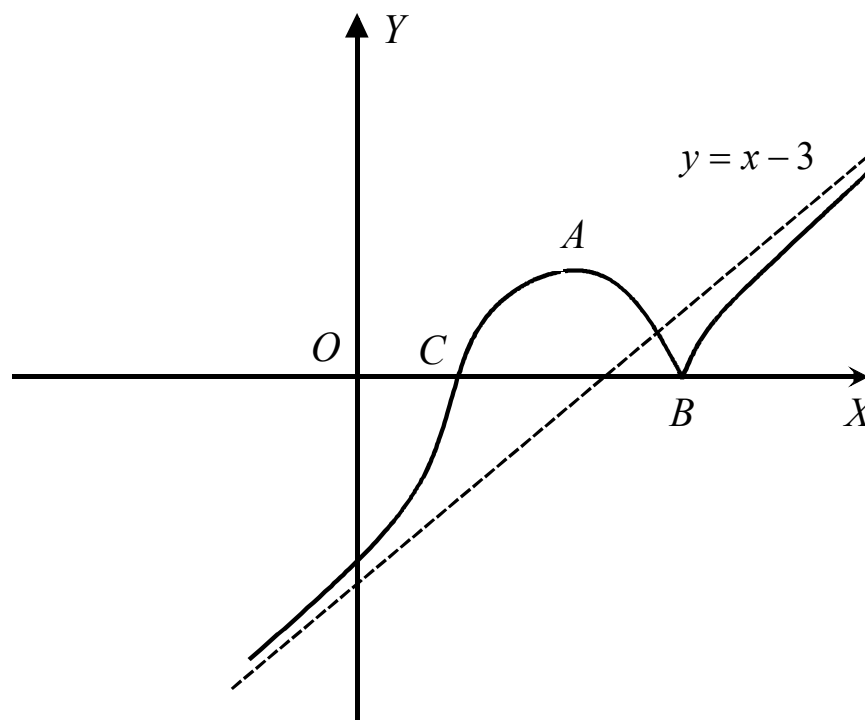


Рисунок 2

3. $y'' \neq 0$, $y'' > 0$, если $x > 1$ и $y'' < 0$, если $x < 1$.

Точка $C(1; 0)$ – точка перегиба с вертикальной касательной к графику функции в этой точке.

На промежутке $(-\infty; 1)$ – функция выпукла вниз, на промежутке $(1; +\infty)$ – функция выпукла вверх.

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{4}{x}\right)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\sqrt[3]{1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3} - 1 \right)}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{9}{x} + \frac{24}{x^2} - \frac{16}{x^3}} + 1} = \frac{-9}{3} = -3. \end{aligned}$$

$y = x - 3$ – наклонная асимптота. График функции изображен на рисунке 2.

По второму семестру

Задача №1

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 55



Исследовать на экстремум следующую функцию двух переменных

$$u(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x + 6y.$$

Решение

Найдём стационарные точки функции $u(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ -x + 4y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1.$$

Проверим выполнение достаточных условий:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2; -1) = 2; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $d^2u(2; -1)$. По критерию

Сильвестра получаем $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta = 2 \cdot 4 - 1 = 7 > 0$ в точке $(2; -1)$ достигается строгий локальный минимум:

$$u(2; -1) = 4 + 2 + 2 - 10 - 6 = -8.$$

Задача №2

Найти экстремумы функции

$$F(x, y) = x + 5y$$

при условии

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = \frac{1}{4}.$$

Решение

Построим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x + 5y + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 1/4).$$

Найдём стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x + 2\lambda y + 1 = 0 \\ 2\lambda x + 6\lambda y + 5 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1/\lambda \\ x = 1/2\lambda \\ \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{2}{2\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^2} = \frac{1}{4} \end{cases}, \lambda^2 = 9, \lambda = \pm 3.$$



Стационарные точки: $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 3\right)$ и $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -3\right)$. Проверим выполнение достаточных условий существования экстремума в стационарных точках.

$$L''_{xx} = 2\lambda; L''_{yy} = 6\lambda; L''_{xy} = 2\lambda,$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 4\lambda dx dy + 6\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + 2dx dy + 3dy^2).$$

Кроме того, дифференцируя уравнение связи, имеем:

$$2x dx + 2y dx + 2x dy + 6y dy = 0, \text{ отсюда } dy = -\frac{x+y}{x+3y} dx.$$

С учётом этой связи между dy и dx получим

$$d^2L = 2\lambda \left(1 - \frac{2(x+y)}{(x+3y)} + \frac{3(x+y)^2}{(x+3y)^2}\right) dx^2,$$

в точке $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 3\right)$ $d^2L = 6\left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\right) dx^2 = \frac{96}{25} dx^2 > 0$, следовательно в

точке $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\right)$ достигается условный минимум.

В точке $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -3\right)$ $d^2L = -6\left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\right) dx^2 = -\frac{96}{25} dx^2 < 0$, в точке

$\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$ достигается условный максимум.

Задача №3

Вычислить интегралы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница

а) $\int_0^1 \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx$; б) $\int_2^\pi (x-2) \sin 3x dx$; в) $\int_1^2 \frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} dx$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx &= \int_0^1 \frac{d(x^2+6x+10)}{\sqrt{x^2+6x+10}} dx - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} = \\ &= 2\sqrt{x^2+6x+10} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+1}} = 2(\sqrt{17}-\sqrt{10}) - \\ &- \ln\left(x+\sqrt{x^2+6x+10}\right) \Big|_0^1 = 2(\sqrt{17}-\sqrt{10}) - \ln \frac{1+\sqrt{17}}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{б)} \int_2^{\pi} (x-2) \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} \int_2^{\pi} (x-2) d(\cos 3x) = -\frac{1}{3} (x-2) \cdot \cos 3x \Big|_2^{\pi} + \\ &+ \frac{1}{3} \int_2^{\pi} \cos 3x dx = -\frac{1}{3} (\pi-2) \cos 3\pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_2^{\pi} = \frac{\pi-2}{3} - \frac{1}{9} \sin 6. \end{aligned}$$

в) $\int_1^2 \frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} dx$. Разложим рациональную функцию

$\frac{x-2}{x(x^2+6x+10)}$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+10} = \frac{(A+B)x^2 + (6A+C)x + 10A}{x(x^2+6x+10)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства, имеем:

$$\begin{cases} A+B=0 & B=1/5 \\ 6A+C=1 \Rightarrow C=1+6/5=11/5. \\ 10A=-2 & A=-1/5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x-2}{x(x^2+6x+10)} dx &= -\frac{1}{5} \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{5} \int_1^2 \frac{x+11}{(x^2+6x+10)} dx = -\frac{1}{5} \ln|x| \Big|_1^2 + \\ &+ \frac{1}{10} \int_1^2 \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + \frac{16}{10} \int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x+10} = -\frac{\ln 2}{5} + \frac{1}{10} \ln(x^2+6x+10) \Big|_1^2 + \\ &+ \frac{8}{5} \int_1^2 \frac{dx}{(x+3)^2+1} = -\frac{\ln 2}{5} + \frac{1}{10} \ln \frac{26}{17} + \frac{8}{5} \operatorname{arctg}(x+3) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{10} \ln \frac{13}{34} + \frac{8}{5} (\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 4). \end{aligned}$$

Задача №4

Вычислить площадь, заключенную между линиями

$$y = \sqrt{x-1}, \quad y = x-3 \quad \text{и} \quad x=1.$$

Решение

Найдём точку пересечения графиков функций $y = \sqrt{x-1}$ и $y = x-3$ (рисунок 3). Из равенства $\sqrt{x-1} = x-3$ имеем $x_0 = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$.

Тогда площадь фигуры равна:

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 58



$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 (\sqrt{x-1} - (x-3)) dx = \int_1^5 \sqrt{x-1} dx - \int_1^5 (x-3) d(x-3) = \\ &= \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \Big|_1^5 - \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_1^5 = \frac{16}{3} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

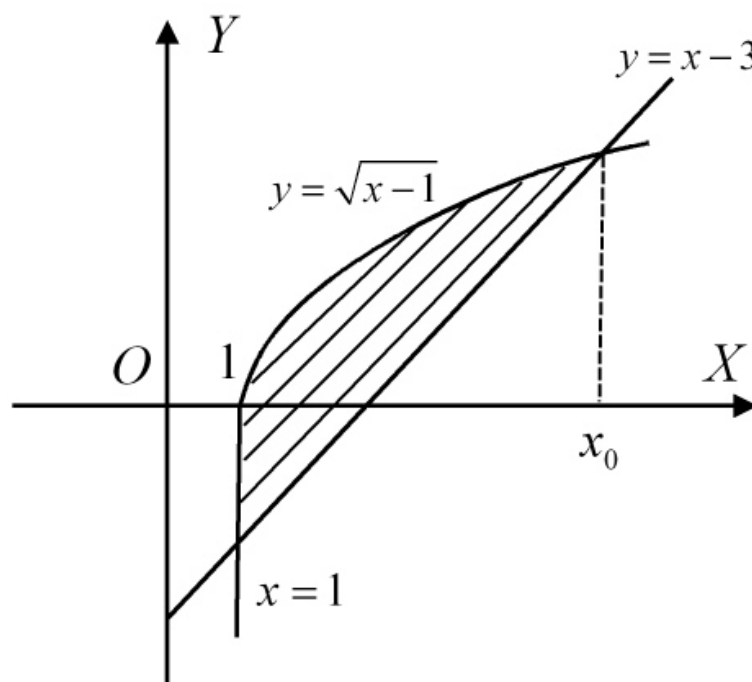


Рисунок 3

Задача №5

Найти длину дуги кривой

$$y = \frac{3}{2} \left(x^{1/3} - \frac{1}{5} x^{5/3} \right), \quad 1 \leq x \leq 8.$$

Решение

Длина дуги кривой в декартовой системе координат вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \\ y' &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} x^{2/3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{2/3} \right), \\ 1 + (y')^2 &= 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^{2/3}} - x^{2/3} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x^{2/3} + \frac{1}{x^{2/3}} \right)^2, \end{aligned}$$



$$L = \frac{1}{2} \int_1^8 (x^{2/3} + x^{-2/3}) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} x^{5/3} + 3x^{1/3} \right) \Big|_1^8 = \frac{54}{5}.$$

Задача №6

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}}{n+1}.$$

Решение

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})}{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})} = \\ &= \frac{2n+3-2n+1}{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})} = \frac{4}{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})} > 0, \quad n \in N. \end{aligned}$$

Пусть $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n-1})}{4n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ – сходится, то по признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Задача №7

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его на сходимость на концах этого интервала

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3n}} (x+2)^n.$$

Решение



Зафиксируем x_0 и рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3n}} (x_0 + 2)^n. \text{ По признаку Даламбера ряд абсолютно}$$

сходится, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+2)(n^2 + 3n)}{((n+1)^2 + 3(n+1))(n+1)}} = 1,$$

то, если $|x_0 + 2| < 1$, т.е. $x \in (-3; -1)$, то ряд сходится абсолютно.

С другой стороны, если $|x_0 + 2| > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x_0 + 2| > 1,$$

следовательно, ряд расходится, если $x \notin [-3, -1]$. Исследуем случай,

когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, т.е. $x_0 = -3$ или $x_0 = -1$.

Рассмотрим ряд при $x_0 = -3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + 3n}} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}},$$

сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} : \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 3n}{n^2 + n}} = 1,$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится, то расходится и рассматриваемый ряд.

При $x_0 = -1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}} \text{ – знакочередующийся ряд.}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2 + 3n}} = 0$ и стремление к нулю монотонное, это следует

из того, что

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 61



$$\left(\frac{x+1}{x^2+3x}\right)' = -\frac{x^2+2x+1}{(x^2+3x)^2} < 0, \forall x \in R,$$

то по признаку Лейбница ряд сходится.

Окончательно, область сходимости исходного ряда – полуинтервал $(-3; -1]$.

Задача №8

Разложить в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, функцию

$$y = \frac{x+8}{x^2-5x-6}.$$

Решение

Представим рациональное выражение, задающее функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x+8}{x^2-5x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-6} = \frac{(A+B)x - 6A + B}{x^2-5x-6},$$

$$x+8 = (A+B)x - 6A + B \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases},$$

$$y = \frac{2}{x-6} - \frac{1}{x+1} = \frac{-2}{6(1-x/6)} - \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6}\right)^{-1} - (1+x)^{-1}.$$

Воспользовавшись стандартным разложением функции

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \text{ где } C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad |x| < 1.$$

Получаем:

$$y = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{1}{3 \cdot 6^n} + (-1)^n\right) x^n, \quad |x| < 1.$$

По третьему семестру

Задача №1

Вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ от функции $f(x,y)$

по заданной области D :

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq x \leq y\}, \quad f(x,y) = x^2 \operatorname{sh} xy.$$

Решение

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 62



Вид области D представлен на рисунке 4.

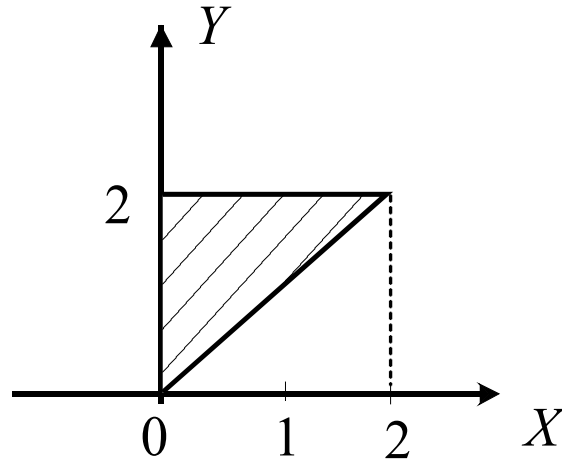


Рисунок 4

Представим двойной интеграл через повторный:

$$\begin{aligned} J &= \iint_D x^2 \operatorname{sh} xy \, dx \, dy = \int_0^2 x^2 \, dx \int_x^2 \operatorname{sh} xy \, dy = \int_0^2 x^2 \, dx \left(\frac{1}{x} \operatorname{ch} xy \Big|_x^2 \right) = \\ &= \int_0^2 x^2 \frac{1}{x} (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} x^2) \, dx = \int_0^2 x \operatorname{ch} 2x \, dx - \int_0^2 x \operatorname{ch} x^2 \, dx = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Первый интеграл J_1 возьмём по частям:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^2 x d(\operatorname{sh} 2x) = \frac{1}{2} \left(x \operatorname{sh} 2x \Big|_0^2 - \int_0^2 \operatorname{sh} 2x \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(2 \operatorname{sh} 4 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \operatorname{sh} 4 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 4 + \frac{1}{2} \right) = \operatorname{sh} 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{ch} 4. \\ J_2 &= \int_0^2 x \operatorname{ch} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \operatorname{ch} x^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 4. \end{aligned}$$

Откуда $J = \operatorname{sh} 4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{ch} 4 + \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 4$.

Задача №2

Вычислить объём тела G с помощью кратного интеграла, используя подходящую замену переменных:

$$G = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 \right\}.$$

Решение

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 63



По определению тройного интеграла объём V области G вычисляется по формуле:

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

Область G представляет из себя конус, проекция которого на плоскость XOY является кругом $D: x^2 + y^2 \leq 4$ (см. рисунок 5).

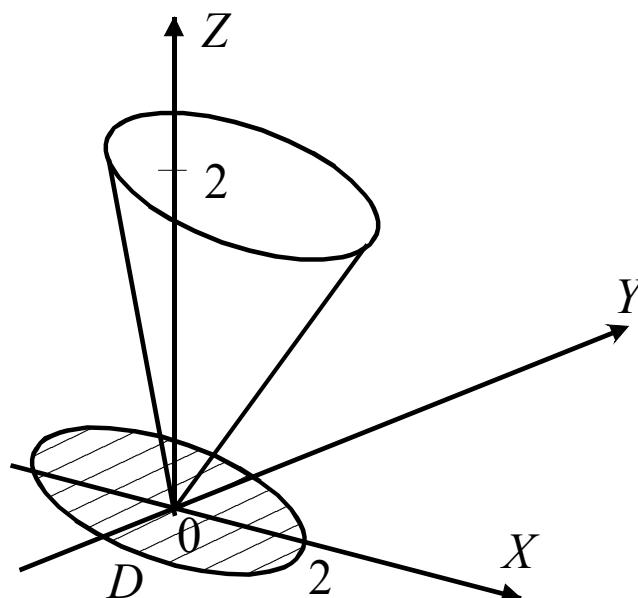


Рисунок 5

Тогда

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 dz = \iint_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \\ &= 2 \iint_D dx dy - \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Первый из интегралов J_1 равен по определению удвоенной площади круга D , т.е. $2\pi r^2 = 8\pi$. Для вычисления второго интеграла перейдём к полярным координатам, связанными с декартовыми координатами формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, r \geq 0 \\ y = r \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

По формуле замены переменных в двойном интеграле [1]:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) |J(r, \varphi)| dr d\varphi,$$



где $J(r, \varphi) = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$ – якобиан замены,

D^* – прообраз области D в координатах (r, φ) , т.к. область $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, то $D^* = \{(r, \varphi) | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Откуда

$$J_2 = \iint_{D^*} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi = \iint_{D^*} r^2 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr = 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

Окончательно: $V = 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$.

Задача №3

Вычислить криволинейный интеграл I рода по плоской кривой Γ :

$$\int_{\Gamma} (x + 2y) ds, \quad \Gamma - \text{ломаная } ABC \text{ с вершинами в точках } A(0,0),$$

$B(0,1), C(1,1)$.

Решение

По свойствам аддитивности и линейности криволинейного интеграла первого рода имеем:

$$\int_{\Gamma} (x + 2y) ds = \int_{AB} (x + 2y) ds + \int_{BC} (x + 2y) ds.$$

Уравнение отрезка AB : $x = 0, 0 \leq y \leq 1$, уравнение отрезка BC : $y = 1, 0 \leq x \leq 1$. Тогда по формуле вычисления криволинейного интеграла 1-рода:

$$\int_{AB} (x + 2y) ds = \int_0^1 (0 + 2y) \sqrt{0^2 + 1^2} dy = 2 \int_0^1 y dy = 1,$$

$$\int_{BC} (x + 2y) ds = \int_0^1 (x + 2) \sqrt{1^2 + 0^2} dx = \int_0^1 (x + 2) dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

Окончательно $\int_{\Gamma} (x + 2y) ds = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

Задача №4



Вычислить криволинейный интеграл по меньшей дуге единичной окружности, заключённой между точками A и B и ориентированной в направлении от точки A к точке B :

$$\int_{AB} x^2 dy - y^2 dx, A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Решение

Зададим уравнение дуги AB единичной окружности параметрически: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Ориентация дуги AB при этом будет удовлетворять условию задачи. Тогда по формуле вычисления криволинейного интеграла 2-рода имеем:

$$\begin{aligned} \int_{AB} x^2 dy - y^2 dx &= \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (\cos^2 t \cos t + \sin^2 t \sin t) dt = \\ &= \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (\cos^3 t + \sin^3 t) dt = \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1 - \sin^2 t) \cos t dt + \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \\ &= \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) - \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \\ &= \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} - \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{\pi/3}^{3\pi/4} = \frac{11}{24} - \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Задача №5

Вычислить криволинейный интеграл по окружности $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, ориентированной по часовой стрелке:

$$\oint_C \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} dx - (x + \arccos x/2) dy.$$

Решение

По формуле Грина, которая в данной задаче применима, т.к. кривая C кусочно-гладкая, а функции $P = \frac{y}{\sqrt{4-x^2}}$ и $Q = -(x + \arccos x/2)$ – непрерывны вместе с частными производными



$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ в замкнутом круге } D: x^2 + y^2 \leq 1 [1],$$

имеем:

$$I = \oint_C \frac{y}{\sqrt{4-x^2}} dx - (x + \arccos x / 2) dy = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

знак «-» перед двойным интегралом объясняется тем, что формула Грина верна при положительной ориентации границы области D , что в нашей задаче совпадает с ориентацией окружности C против часовой стрелки, а по условию надо подсчитать значение интеграла при противоположной ориентации окружности.

$$I = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \pi$$

– площадь единичного круга.

Задача №6

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y dy = \sqrt{2x^2 + y^2} dx.$$

Решение

Данное уравнение является однородным. Необходимо произвести замену $y(x) = z(x) x$, где $z(x)$ – новая функция. В силу замены $dy = z dx + x dz$. Подставляя в уравнение, получим уравнение относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$zx(z dx + x dz) = \sqrt{2x^2 + x^2 z^2} dx \Leftrightarrow z^2 dx + z x dz = \sqrt{2 + z^2} dx \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$(z^2 - \sqrt{2 + z^2}) dx = -z x dz - \text{уравнение с разделяющимися переменными.}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = - \frac{z dz}{z^2 - \sqrt{2 + z^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|x| = - \int \frac{z dz}{z^2 - \sqrt{2 + z^2}} + C, C \in R \\ z^2 \neq \sqrt{2 + z^2} \\ z \neq \pm \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Подстановкой в уравнение убеждаемся, что функции $z = \pm \sqrt{2}$ – решения уравнения.

$$\int \frac{z dz}{z^2 - \sqrt{2 + z^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(z^2)}{z^2 - \sqrt{2 + z^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - \sqrt{2 + t}} \Big|_{t=z^2} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{2u du}{u^2 - 2 - u} \Big|_{u=\sqrt{2+t}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 - u - 2)}{u^2 - u - 2} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \\
&= \frac{1}{2} \ln|u^2 - u - 2| + \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u+1)(u-2)} = \frac{1}{2} \ln|u^2 - u - 2| - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{u+1}{u-2} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \ln|u^2 - u - 2| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{u-2}{u+1} \right| + C_1, C_1 \in R.
\end{aligned}$$

Подставляя в выражение для решения имеем:

$$\begin{aligned}
\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|u^2 - u - 2| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{u-2}{u+1} \right| &= C_1 \Leftrightarrow \ln x^6 \left| (u^2 - u - 2)^3 \frac{u-2}{u+1} \right| = C_1, \\
\ln x^6 (u+1)^2 (u-2)^4 &= C_1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x^6 (u+1)^2 (u-2)^4 &= C, C > 0.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая все решения, получим общее решение уравнения:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2x^2 + y^2} + x \right)^2 \left(\sqrt{2x^2 + y^2} - 2x \right)^4 = C \\ y = \pm \sqrt{2}x \end{cases}$$

Задача №7

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 1$:

$$xy' + 3y = x^2 y^3.$$

Решение

Запишем уравнение в приведённом виде:

$$y' + \frac{3}{x}y = xy^3 - \text{уравнение Бернулли.}$$

Замена $\frac{1}{y^2} = z \Rightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3} \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$. Поделим уравнение на y^3 и используем замену:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{3}{xy^2} = x \Leftrightarrow -\frac{z'}{2} + \frac{3}{x}z = x \Leftrightarrow z' - \frac{6}{x}z = -2x.$$

Полученное уравнение линейное уравнение первого порядка. Решим однородное уравнение $z' - \frac{6}{x}z = 0$, $\frac{dz}{z} = 6\frac{dx}{x} \Rightarrow z = Cx^6$. Общее решение найдём методом вариации произвольной постоянной C . Полагая,

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 68



$C = C(x)$ ищем общее решение в виде $z = C(x)x^6$, где $C(x)$ неизвестная функция. Подставляя в неоднородное уравнение, получим:

$$C'x^6 + 6Cx^5 - 6Cx^5 = -2x \Leftrightarrow C'x^6 = -2x, C(x) = -2 \int \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{2x^4} + C_1, C_1 \in R.$$

Отсюда общее решение линейного уравнения:

$$z = \frac{x^2}{2} + C_1x^6.$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем: $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + C_1x^6}}$ – общее

решение исходного уравнения. Подставляя начальное условие, находим

$$C_1 = \frac{1}{2}, \text{ тогда } y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + x^6}} \text{ – решение задачи.}$$

Задача №8

Решить задачу Коши:

$$yy'' + y'^2 + yy'^3 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Решение

Уравнение не зависит от переменной x . Поэтому можно понизить порядок уравнения заменой $y'(x) = p(y(x))$, тогда $y'' = p'p$. При этом из начальных условий следует, что $p(1) = 1$.

$$yp'p + p^2 + yp^3 = 0,$$

т.к. $p = 0$ не является решением задачи Коши, то полученное уравнение эквивалентно уравнению:

$$p' + \frac{p}{y} = -p^2 \text{ – уравнение Бернулли.}$$

Замена $z = \frac{1}{p}$ приводит к линейному уравнению $z' - \frac{1}{y}z = 1$, решая его,

получаем $z = Cy + y \ln y$ или $p = \frac{1}{Cy + y \ln y}$. Подставляя начальное



условие $p(1)=1$, получим $C=1$. Возвращаясь к исходной функции, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(1+\ln y)} \text{ или } (y + y \ln y) dy = dx, \text{ получаем:}$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^2 \ln y}{2} - \frac{y^2}{4} = x + C_1.$$

Подставляя начальное условие, получим $\frac{1}{4} = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$.

Решение задачи Коши задаётся выражением:

$$y^2(\ln y^2 + 1) = 4x + 1.$$

Задача №9

Найти общее действительное решение однородного дифференциального уравнения:

$$y''' + 4y' = 0.$$

Решение

Это однородное линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения общего решения найдём корни характеристического уравнения: $\lambda^3 + 4\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Тогда общее действительное решение имеет вид: $y = C_1 e^{0x} + C_2 \operatorname{Re}(e^{2ix}) + C_3 \operatorname{Im}(e^{2ix})$, т.к. $\operatorname{Re}(e^{2ix}) = \cos 2x$, $\operatorname{Im}(e^{2ix}) = \sin 2x$, то общее действительное решение имеет вид: $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$.

Критерии оценки

Оценка «отлично» выставляется студенту, если практическая задача решена полностью с соответствующими математическим выкладками, обоснованиями или устными ответам на возникшие у преподавателя вопросы.

Оценка «хорошо» - выставляется студенту, если практическая задача решена полностью без подробных выкладок.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача решена не полностью.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если практическая задача не решена.

Оценка выставляется в журнале посещаемости студентов.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 70



3.6. Тесты

Целью тестирования является закрепление, углубление и систематизация знаний студентов, полученных на лекциях и в процессе самостоятельной работы; проведение тестирования позволяет ускорить контроль за усвоением знаний и объективизировать процедуру оценки знаний студента.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОВЕРЯЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора
ОПК-1 Способен применять базовые знания фундаментальных разделов наук о Земле, естественно-научного и математического циклов при решении задач в области экологии и природопользования	ОПК-1.1 Знать фундаментальные разделы естественно-научного и математического циклов, используемые при решении задач в области экологии и природопользования навыки применения базовых знаний фундаментальных разделов
ОПК-3 Способен применять базовые методы экологических исследований для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-3.3 Уметь применять на практике современные методы математической обработки результатов экологических исследований для решения задач профессиональной деятельности

Примерные тестовые задания контроля знаний студентов приведены в таблице 3.1.

Критерии оценки

Данное тестирование ставит целью оценить уровень освоения студентами изученного раздела дисциплины как промежуточное тестирование, уровень освоения материала в целом по дисциплине, а также знаний и умений, предусмотренных компетенциями.

Тестирование можно проводить для студентов всех форм обучения в письменной форме на бумажных носителях в течение 20 минут или с использованием соответствующих программ после каждого раздела. Каждый

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 71



студент получает бланк с тестовыми материалами, в каждом по 5 тестовых заданий и письменно готовит ответы на поставленные задания путем подчеркивания выбранного ответа.

По истечении 20 минут преподаватель анализирует и оценивает выполненные студентами задания. В целом по дисциплине тестирование проводится 2 часа по всем вопросам тестовых заданий.

По результатам тестирования преподавателем в журнале учета занятий каждому студенту выставляется оценка «зачтено» или «незачтено».

3.7. Задания для подготовки к занятиям семинарского типа для студентов очной формы обучения по высшей математике

По первому семестру

Цели и задачи: изучить основные понятия и теоремы линейной алгебры и аналитической геометрии, элементы дискретной математики и математической логики, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одного независимого переменного.

Освоить основные приемы и методы решения типовых задач. Изучить основы составления математических моделей задач прикладного характера, а также основы составления алгоритма решения профессионально-ориентированных задач и умению анализировать результат их решения.

Цели и задачи занятий с применением ИАМ: формирование у студента умений и практических навыков: умение формулировать мысли, выявление точек зрения студентов при выборе математической формулировки задачи и методов её решения и анализа.

Мозговой штурм:

Цель – формирование у студента умений и практических навыков: умение формулировать мысли, выявление точек зрения студентов при выборе математической формулировки задачи и методов её решения.

Дискуссия:

Цель – развитие логического мышления при анализе решения и оценке результатов профессионально ориентированных практических задач.

Задания: расчетно-графические работы приведены в № №1-15 (источники 1-3), дополнительные задания приведены в пункте 5.

Источники: обязательные: 1-3,4,5; дополнительные: 1-7.

По второму семестру

Цели и задачи: изучить основные понятия и теоремы по темам: неопределенные и определенные интегралы. Несобственные интегралы. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных. Числовые и функциональные ряды.

Освоить основные приемы и методы решения типовых задач. Изучить основы составления математических моделей задач прикладного характера, а также основы

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 72



составления алгоритма решения профессионально-ориентированных задач и умению анализировать результат их решения.

Цели и задачи занятий с применением ИАМ: формирование у студента умений и практических навыков: умение формулировать мысли, выявление точек зрения студентов при выборе математической формулировки задачи и методов её решения и анализа.

Мозговой штурм:

Цель – формирование у студента умений и практических навыков: умение формулировать мысли, выявление точек зрения студентов при выборе математической формулировки задачи и методов её решения.

Дискуссия:

Цель – развитие логического мышления при анализе решения и оценке результатов профессионально ориентированных практических задач.

Задания: расчетно-графические работы приведены в № №1-15 (источники 1-3), дополнительные задания приведены в пункте 5.

Источники: обязательные: 1-3,4,5; дополнительные: 1-9.

По третьему семестру

Цели и задачи: основные понятия и теоремы по темам: кратные и криволинейные интегралы. Комплексные числа и операции с ними. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Изучить основы составления математических моделей задач прикладного характера, а также основы составления алгоритма решения профессионально-ориентированных задач и умению анализировать результат их решения.

Цели и задачи занятий с применением ИАМ: формирование у студента умений и практических навыков: умение формулировать мысли, выявление точек зрения студентов при выборе математической формулировки задачи и методов её решения и анализа.

Мозговой штурм:

Цель – формирование у студента умений и практических навыков: умение формулировать мысли, выявление точек зрения студентов при выборе математической формулировки задачи и методов её решения.

Дискуссия:

Цель – развитие логического мышления при анализе решения и оценке результатов профессионально ориентированных практических задач.

Задания: расчетно-графические работы приведены в № №1-15 (источники 1-3), дополнительные задания приведены в пункте 5.

Источники: обязательные: 1-3,4,5; дополнительные: 1-9.

3.8 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 73



Оценка знаний, умений, навыков, характеризующая этапы формирования компетенций по дисциплине «Высшая математика» проводится в форме текущей, рубежной и итоговой(промежуточной) аттестации.

Контроль текущей успеваемости обучающихся – текущая аттестация – проводится в ходе семестра с целью определения уровня усвоения обучающимися знаний; формирования у них умений и навыков; своевременного выявления преподавателем недостатков в подготовке студентов и принятия необходимых мер по ее корректировке; совершенствованию методики обучения; организации учебной работы и оказания обучающимся индивидуальной помощи.

К контролю текущей успеваемости относятся проверка знаний, умений и навыков обучающихся:

- на занятиях(опрос,тестирование);
- по результатам написания самостоятельных работ;
- по результатам написания тестирования;
- по результатам выполнения коллоквиумов;
- по результатам проверки качества конспектов лекций и иных материалов;

Контроль за выполнением студентами каждого вида работ может осуществляться поэтапно и служит основанием для предварительной и рубежной аттестации по дисциплине.

Рубежная аттестация обучающихся проводится преподавателем в целях подведения промежуточных итогов текущей успеваемости студентов, анализа состояния учебной работы, выявления неуспевающих, ликвидации задолженностей.

К рубежному контролю относятся проверка знаний, умений и навыков обучающихся:

- по результатам проведения рубежного контроля уровня усвоения знаний (с помощью контрольных работ и РГР);

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится с целью выявления соответствия уровня теоретических знаний, практических умений и навыков по дисциплине «Высшая математика» требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности): «Экология и природопользование» в форме экзамена/зачета.

Экзамен/зачет проводится после завершения изучения дисциплины в объеме рабочей учебной программы. Форма проведения зачета определяется кафедрой (устный – по билетам, либо путем собеседования по вопросам; письменная работа, тестирование и др.). Оценка по результатам экзамена – «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Все виды текущего и рубежного контроля осуществляются на практических занятиях.

Каждая форма контроля по дисциплине включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень освоения студентами знаний и практические задания, выявляющие степень сформированности умений и навыков.

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 74



Процедура оценивания компетенций обучающихся основана на следующих стандартах:

1. Периодичность проведения оценки (на каждом занятии).
2. Многоступенчатость: оценка (как преподавателем, так и студентами группы) и самооценка обучающегося, обсуждение результатов и комплекса мер по устранению недостатков.
3. Единство используемой технологии для всех обучающихся, выполнение условий сопоставимости результатов оценивания.
4. Соблюдение последовательности проведения оценки: предусмотрено, что развитие компетенций идет по возрастанию их уровней сложности, а оценочные средства на каждом этапе учитывают это возрастание.

Краткая характеристика процедуры реализации текущего и итогового контроля по дисциплине для оценки компетенций обучающихся представлена в таблице:

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика процедуры оценивания компетенций	Представление оценочного средства в фонде
1	Тест	Проводится семинарских занятиях. Позволяет оценить уровень знаний студентами теоретического материала по дисциплине. Осуществляется на бумажных или электронных носителях по вариантам. Количество вопросов в каждом варианте определяется преподавателем. Отведенное время на подготовку определяет преподаватель.	Фонд тестовых заданий
2	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися	Вопросы по темам/разделам дисциплины
3	Разноуровневые задачи и задания	Выполняются на практических занятиях по темам. а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины;	Комплект типовых задач



		б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей.	
4	Экзамен/зачет	Проводится в заданный срок, согласно графику учебного процесса. При выставлении оценок учитывается уровень приобретенных компетенций студента. Компонент «знать» оценивается теоретическими вопросами по содержанию дисциплины, компоненты «уметь» и «владеть» - практикоориентированными заданиями. Аудиторное время, отведенное студенту, на подготовку - 60 мин.	Комплект вопросов к зачету, экзамену

4. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю) «Высшая математика» включает:

- перечень компетенций, планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы и этапы их формирования;
- описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования;
- описание шкал оценивания;
- критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций;
- методические материалы, определяющие процедуры оценивания;
- типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения (промежуточной аттестации) по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции(ий).

Фонд оценочных средств по дисциплине «Высшая математика» представлен в приложении 1.



5. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 5.1 – Основная и дополнительная литература

№	Наименование и полное библиографическое описание	Количество экземпляров в библиотеке
Основная литература		
1	Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Часть 2. Червяков А.В., Соловьев И.А, Репин А.Ю. Учебное пособие. Санкт-Петербург Лань 2009 - 448с	500
2	Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Часть 1. Червяков А.В., Соловьев И.А, Репин А.Ю. Учебное пособие. Санкт-Петербург. Лань 2009 - 288с	500
3	Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Часть 3. Червяков А.В., Соловьев И.А, Репин А.Ю. Учебное пособие. Санкт-Петербург. Лань 2007, - 320с	500
4	Высшая математика (учебник). Щипачев В.С. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015, 479с. http://znanium.com/catalog/product/469720	Электронный доступ через ЭБС Университета
5	Задачник по высшей математике. Учебное пособие. Щипачев В.С., 10-е изд., стер. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015, 304с. http://znanium.com/catalog/product/470407	Электронный доступ через ЭБС Университета
Дополнительная литература		
1	Элементы линейной алгебры и их применение при решении практических задач Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., Макаров П.В., Кузнецов В.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2016, - 64с	300
2	Комплексные числа. Понятие функции комплексного переменного. Макаров П.В., Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., Иванов В.П., Семенова Н.В. Учебное пособие . Москва, ГУЗ, 2017,-47с	150
3	Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл. Часть I Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2018, - 68с	150
4	Интегральное исчисление. Определенный интеграл. Часть II. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В., Макаров П.В. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2018, - 50с	150
© ГУЗ		Стр. 77
Выпуск 1		
Изменение 0		Экземпляр №1



5	Элементы теории множеств и математической логики. Кузнецова Н.А., Червяков А.В., Хасанов А.А. Учебное пособие, Москва, ГУЗ, 2019,- 46с	150
6	Математический анализ функции одной переменной. Часть I. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2019. - 69 с.	150
7	Математический анализ функции одной переменной. Часть II. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2019. - 61 с.	150
8	Интегральное исчисление. Приложение определенного интеграла. Часть III. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2020. - 62 с.	150
9	Математический анализ функции одной переменной. Часть III. Кузнецова Н.А., Курочкина К.В. Учебное пособие. Москва, ГУЗ, 2020. - 62 с.	150

6. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 6.1 – Описание информационных ресурсов необходимых для освоения дисциплины

№	Адрес сайта и его описание	Перечень материалов представленных на сайте
1.	http://fm.cdml.ru Сайт кафедры высшей математики и физики ГУЗ	Авторские разработки коллектива кафедры в области методик преподавания основных разделов математических и физических дисциплин, методические указания и контрольные задания по решению расчетно-графических и контрольных работ, авторские лабораторные практикумы, с методическими рекомендациями по их выполнению, решению и оформлению.
2.	http://www.book.ru/ Издательство КНОРУС	Популярная электронная библиотечная система современной учебной и научной литературы. Соответствует федеральным государственным образовательным стандартам.
3.	www.znanium.com.ru / издательство ИНФРА-М	Коллекция электронных версий изданий (книг, журналов, статей и пр.), сгруппированных по тематическим и целевым признакам.
4.	ЭБС «ЮРАЙТ» (www.biblio-online.ru)	Виртуальная библиотека



7. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

При осуществлении образовательного процесса студентами и профессорско-преподавательским составом используются следующее программное обеспечение: Microsoft Office (Power Point, Word и т. д), Open Office, Skype, WhatsApp.

На практических занятиях студенты представляют презентации и доклады, подготовленные с помощью программного приложения Microsoft Power Point, подготовленные ими в часы самостоятельной работы.

Информационные технологии:

- сбор, хранение, систематизация и выдача учебной и научной информации;
- обработка текстовой, графической и эмпирической информации;
- подготовка, конструирование и презентация итогов исследовательской и аналитической деятельности;
- самостоятельный поиск дополнительного учебного и научного материала, с использованием поисковых систем и сайтов сети Интернет, электронных энциклопедий и баз данных;
- использование электронной почты преподавателей и обучающихся для рассылки, переписки и обсуждения возникших учебных проблем.

Информационные справочные системы

В ходе реализации целей и задач по дисциплине обучающиеся могут при необходимости использовать возможности информационно-справочных систем, электронных библиотек и архивов.

Информационно-справочные и информационно-правовые системы:

- справочная правовая система ГАРАНТ (интернет-версия). URL: <http://www.garant.ru>
- Консультант Плюс. URL: <http://www.consultant.ru/document>
- Электронно-библиотечные системы (ЭБС): [Университетская библиотека online](#) и [Знаниум.com](#)

8. ОПИСАНИЕ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ БАЗЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Для материально-технического обеспечения дисциплины «Высшая математика» используются:

Аудитория 4301 для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, курсового проектирования, групповых и индивидуальных консультаций, для текущего контроля и промежуточной аттестации, занятий практического типа:

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 79



Рабочее место преподавателя. Рабочие места обучающихся. Стационарный мультимедийный проектор. Ноутбук ASUS X553M. Microsoft Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО)

Аудитория 4300 для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, курсового проектирования, групповых и индивидуальных консультаций, для текущего контроля и промежуточной аттестации, занятий практического типа:

Рабочее место преподавателя. Рабочие места обучающихся. Стационарный мультимедийный проектор. Ноутбук ASUS X553M. Microsoft Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО)

Аудитории - помещения для самостоятельной работы обучающихся, имеется подключение к сети «Интернет» и доступ в электронную информационно-образовательную среду:

Читальный зал. Рабочие места студентов. Компьютеры 12 шт. Доступна вся учебная и методическая литература, включая доступ к ЭБС.

Аудитории 2203-2212 (компьютерные классы)

Рабочие места обучающихся. Проекционная панель LG 43UK6390PLG – 1 шт., стационарный компьютер – 9 шт. Моноблок – 1 шт. Windows, Microsoft Office (академическая лицензия), Консультант Плюс, Гарант, Adobe Acrobat Reader DC (свободно распространяемое ПО), Autodesk Education 2019 (Autodesk AutoCAD, Autodesk Revit Architect, Autodesk Civil 3D, Autodesk 3ds MAX – академические лицензии), GRAPHISOFT (ArchiCad 24 Russian, Базовый BIMcloud, MEP Modeler – академические лицензии), Adobe Photoshop, CorelDRAW, Консультант Плюс, Гарант.

9. ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

Профессорско-педагогический состав знакомится с психолого-физиологическими особенностями обучающихся инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, индивидуальными программами реабилитации инвалидов (при наличии). При необходимости осуществляется дополнительная поддержка преподавания тьюторами, психологами, социальными работниками, прошедшими подготовку ассистентами.

В соответствии с методическими рекомендациями Минобрнауки РФ (утв. 8 апреля 2014 г. N АК-44/05вн) в курсе предполагается использовать социально-активные и рефлексивные методы обучения, технологии социокультурной реабилитации с целью оказания помощи в установлении полноценных межличностных отношений с другими студентами, создании комфортного психологического климата в студенческой группе. Подбор и разработка учебных материалов производятся с учетом предоставления материала в различных формах:

© ГУЗ	Выпуск 1	Изменение 0	Экземпляр №1	Стр. 80



аудиальной, визуальной, с использованием специальных технических средств и информационных систем.

Медиа материалы также следует использовать и адаптировать с учетом индивидуальных особенностей обучения лиц с ОВЗ.

Освоение дисциплины лицами с ОВЗ осуществляется с использованием средств обучения общего и специального назначения (персонального и коллективного использования). Материально-техническое обеспечение предусматривает приспособление аудиторий к нуждам лиц с ОВЗ.

Форма проведения аттестации для студентов-инвалидов устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей. Для студентов с ОВЗ предусматривается доступная форма предоставления заданий оценочных средств, а именно:

- в печатной или электронной форме (для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата);
- в печатной форме или электронной форме с увеличенным шрифтом и контрастностью (для лиц с нарушениями слуха, речи, зрения);
- методом чтения ассистентом задания вслух (для лиц с нарушениями зрения).

Студентам с инвалидностью увеличивается время на подготовку ответов на контрольные вопросы. Для таких студентов предусматривается доступная форма предоставления ответов на задания, а именно:

- письменно на бумаге или набором ответов на компьютере (для лиц с нарушениями слуха, речи);
- выбором ответа из возможных вариантов с использованием услуг ассистента (для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата);
- устно (для лиц с нарушениями зрения, опорно-двигательного аппарата).

При необходимости для обучающихся с инвалидностью процедура оценивания результатов обучения может проводиться в несколько этапов.